MATHS

2de Édition 2023

Livre du professeur

Hélène GRINGOZ
Coordinatrice
Académie
de Grenoble

Frédéric WEYERMANN
Coordinateur
Lycée Polyvalent Léon Blum
Créteil (94)

Sandrine BAGLIERI
Académie
d'Aix-Marseille

François GUIADER
Lycée Teilhard de Chardin
St Maur-des-Fossés (94)

Delphine BAU
Lycée Polyvalent Évariste Galois
Noisy le Grand (93)

Didier KRIEGER
Lycée André Marie Ampère
Lyon (69)

Jérémy COUTEAU
Lycée Jean Perrin
Rezé (44)

Laura MAGANA
Lycée Alexandre Dumas
Saint-Cloud (92)

Muriel GOARIN
Lycée Clémenceau,
Nantes (44)

Mathieu PRADEL
Lycée Diderot
Paris (75)

Les auteurs et les éditions MAGNARD remercient vivement l'association Sésamath
pour la réalisation de ressources pédagogiques et le travail collaboratif dans le cadre de notre partenariat.

MAGNARD

Sommaire

Résolution de problèmes 3

Méthodes des automatismes 6

Partie 1 Algorithmique et programmation

1 Programmation en langage Python 9

Partie 2 Nombres et calculs

2 Nombres et calculs 23

3 Intervalles, inégalités, inéquations 42

4 Calcul littéral 59

Partie 3 Géométrie

5 Géométrie non repérée 83

6 Vecteurs et repère 103

7 Droites du plan et systèmes d'équations 123

Partie 4 Fonctions

8 Généralités sur les fonctions, fonctions de référence 139

9 Variations et extremums 163

10 Signe d'une fonction 181

Partie 5 Statistiques et probabilités

11 Proportions et évolutions 202

12 Statistiques descriptives 217

13 Probabilités et échantillonnage 237

Résolution de problèmes

Tout au long du manuel, nous proposons des exercices non guidés permettant aux élèves d'apprendre à résoudre des problèmes selon les principes didactiques du document « la résolution de problèmes au collège » pour être dans la même continuité d'apprentissage entre le collège et le lycée.
Nous avons déterminé 7 thèmes parcourant les 13 chapitres. Afin de montrer l'universalité des réflexes associés à chaque thème, chacun de ces thèmes (sauf un pour des raisons de parité du nombre de chapitres) est présent avec les mêmes réflexes dans deux chapitres via la page dédiée « résolution de problèmes ». Ces thématiques sont liés mais sont différenciés pour expliciter les réflexes associés.

L'apprentissage se décompose en trois parties : l'apprentissage, le transfert des réflexes et l'identification du thème à utiliser.

- **l'apprentissage de réflexes lié à la thématique du chapitre**

Un exercice est corrigé en montrant comment les réflexes permettent de résoudre le problème.
Trois exercices sont ensuite proposés pour fixer ces réflexes. Le premier permet de reproduire le raisonnement proposé, le deuxième et le troisième introduisent des adaptations plus ou moins implicites.

- **Le transfert des réflexes sur des exercices fléchés**

Dans chaque chapitre, des exercices sont fléchés comme utilisant un thème précis permettant aux élèves soit d'être guidés en se référant à la page concernée, soit d'avoir conscience d'identifier la thématique nécessaire à la résolution de l'exercice.

- **L'identification du thème à utiliser**

Des exercices non fléchés mais indiqués dans ce livre du professeur (voir le tableau en page suivante) permettent aux élèves d'apprendre à identifier parmi les thématiques celles qu'il faut utiliser.

1. Décomposer un problème en sous problèmes			
Apprentissage des réflexes Chapitre 1 **Programmation en langage Python**	J'identifie les différents sous-problèmes qu'il va falloir résoudre pour répondre au problème. Éventuellement, identifier leur(s) paramètre(s) en commun s'il y en a un.	Je résous ces sous-problèmes de manière indépendante (en nommant de manière similaire les paramètres communs).	Je relie les sous-problèmes entre eux.
Transfert des réflexes	Chapitre 1 77 p. 36 Chapitre 5 46 p. 136 Chapitre 6 93 p. 165 Chapitre 8 82 p.222 Chapitre 12 94 p.332 Chapitre 13 136 p.367		
Identification des thèmes à utiliser	Chapitre 6 TP1 p.174		
2. Modéliser une situation à l'aide d'une indéterminée			
Apprentissage des réflexes Chapitre 3 **Intervalles, inégalités, inéquation** Chapitre 8 **Généralités sur les fonctions, fonctions de référence**	Identifier l'indéterminée et sa nature	Traduire l'énoncé à l'aide de cette indéterminée.	
Transfert des réflexes	Chapitre 3 104 p.87 108 p.87 Chapitre 7 123 p.195 Chapitre 8 80 p.222 Chapitre 9 142 p.258 Chapitre 11 95 p.306 Chapitre 13 80 p.362		
Identification des thèmes à utiliser	Chapitre 6 147 p.169 Chapitre 8 81 p.222 83 p.222 Chapitre 13 142 p.369		
3. Analyser un problème pour le résoudre			
Apprentissage des réflexes Chapitre 5 **Géométrie non repérée** Chapitre 10 **Signe d'une fonction**	Identifier la conclusion ou la question posée.	En déduire les étapes du raisonnement ainsi que les propriétés utiles et leurs hypothèses.	Reprendre le raisonnement dans l'ordre en suivant toutes les étapes
Transfert des réflexes	Chapitre 1 61 p.34 Chapitre 2 108 p.60 157 p.63 Chapitre 5 73 p. 138 Chapitre 6 78 p. 164 Chapitre 8 135 p. 228 Chapitre 10 104 p. 281 Chapitre 11 48 p. 301 Chapitre 12 71 p. 327		
Identification des thèmes à utiliser	Chapitre 1 72 p.35 78 p. 36 79 p. 36 Chapitre 6 135 p.168 113 p.166 128 p. 167 Chapitre 8 121 p. 226 Chapitre 11 90 p. 305 Chapitre 12 85 p. 330		

4. Émettre une conjecture			
Apprentissage des réflexes Chapitre 6 **Vecteurs et repère** Chapitre 4 **Calcul littéral**	Commencer par s'appuyer sur des exemples. En géométrie, on fait généralement des schémas bien codé(s) ; en algèbre ou analyse, on prend des valeurs particulières.	Reconnaître une configuration connue. En géométrie, cela peut être un polygone particulier un alignement, un milieu, etc. ; en algèbre ou analyse, cela peut être des multiples, des carrés, etc.	
Transfert des réflexes	Chapitre 4 133 p. 116 Chapitre 5 114 p. 142 Chapitre 6 82 p. 164		
Identification des thèmes à utiliser	Chapitre 2 166 p. 64 Chapitre 6 82 p. 164 Chapitre 8 129 p. 227		
5. Choisir le bon schéma			
Apprentissage des réflexes Chapitre 11 **Proportions et évolutions** Chapitre 13 **Probabilités et échantillonnage**	Identifier le type de schéma à réaliser pour visualiser le problème.	Faire ce schéma en respectant les hypothèses du problème	
Transfert des réflexes	Chapitre 3 109 p.87 Chapitre 4 115 p.114 Chapitre 7 120 .p.195 Chapitre 9 119 p.255 Chapitre 11 75 p.303 Chapitre 13 116 p.365		
Identification des thèmes à utiliser	Chapitre 5 126 p.144 Chapitre 6 106 p.166 Chapitre 7 124 p.195 Chapitre 8 124 p.226 128 p.227 Chapitre 11 80 p.303 Chapitre 13 104 p.364 127 p.366		
6. Vérifier un résultat			
Apprentissage des réflexes Chapitre 7 **Droites du plan et systèmes d'équations** Chapitre 12 **Statistiques descriptives**	Vérifier que la solution trouvée n'est pas aberrante.	Vérifier que la solution trouvée est cohérente avec le problème posé.	Si cela est possible, faire une vérification numérique
Transfert des réflexes	Chapitre 5 79 p. 139 Chapitre 6 121 p.166 Chapitre 7 102 p.193 Chapitre 12 61 p.326 Chapitre 13 140 p.368		
Identification des thèmes à utiliser	Chapitre 2 107 p.60 Chapitre 4 112 p.113 Chapitre 6 126 p.167 Chapitre 7 101 et 102 p.193 122 p.196 Chapitre 8 66 p.221 90 et 91 p.223 127 p.227 Chapitre 13 139 p.368		
7. Rédiger une solution			
Apprentissage des réflexes Chapitre 2 **Nombres et calculs** Chapitre 9 **Variations et extremums**	Vérifier les conditions d'application d'une propriété ou les éléments d'une définition	S'assurer dans la rédaction que ces conditions sont vérifiées	Utiliser les bonnes implications logiques pour lier les différents éléments de la réponse dans la rédaction finale.
Transfert des réflexes	Chapitre 2 112 p.60 Chapitre 4 122 p.115 Chapitre 9 106 p.254 Chapitre 10 106 p.281 Chapitre 11 93 p.305		
Identification des thèmes à utiliser	Chapitre 2 118 p.60 Chapitre 5 114 p.142 Chapitre 9 107 p.254 124 p.256 Chapitre 11 90 p.305		

Méthodes des automatismes

Calculer mentalement avec des décimaux

1 **a)** A = 5,6 **b)** B = 720
c) 3,7 **d)** 42,75

2 **a)** E = 22,4 **b)** F = 168
c) G = 1 500,003 **d)** H = –297

Calculer mentalement avec des fractions

3 **a)** A = 18 **b)** $B=-\frac{1}{20}$ **c)** $C=\frac{2}{5}$ **d)** $D=-\frac{1}{24}$

4 **a)** E = 1 **b)** $F=-\frac{3}{2}$ **c)** $G=\frac{5}{2}$ **d)** $H=-\frac{4}{9}$

Effectuer des calculs simples avec des pourcentages et passer d'une écriture à une autre

5 **a)** 18 € **b)** 360 €

6 60 %

Appliquer un pourcentage d'évolution

7 3 450 €

8 1 099 élèves.

Appliquer une formule mathématique

9 1. $\mathcal{V}=44{,}101\,548\,\pi\approx 138{,}5\ \text{cm}^3$
2. $67{,}5\ \text{cm}^3$.

10 10,625 W

Résoudre une équation du 1^er^ degré

11 **a)** $\mathcal{S}=\{17\}$ **b)** $\mathcal{S}=\left\{\frac{15}{7}\right\}$
c) $\mathcal{S}=\{12\}$ **d)** $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

12 **a)** $\mathcal{S}=\left\{\frac{18}{7}\right\}$. **b)** $\mathcal{S}=\{-1\}$
c) $\mathcal{S}=\{1\}$ **d)** $\mathcal{S}=\left\{\frac{2}{5}\right\}$

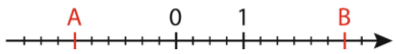
Utiliser un ordre de grandeur pour contrôler un résultat

13 **a)** 10 500
b) 140
c) –15 000

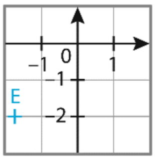
14 116000

Repérer sur une droite graduée ou un plan repéré

15



16 1. C(0,5 ; 0,25)
2.



Préciser les éléments caractéristiques d'un graphique

17 L'axe des abscisses représente le temps en années et l'axe des ordonnées représente le salaire minimum horaire en euros.

18 L'axe des abscisses représente la pointure en taille de pointure et l'axe des ordonnées représente la taille en cm.

Réaliser une estimation graphique

19 1. 1986 ou 1987
2. Environ 72 ans.

20 1. Approximativement –2,8 ; 0,8 et 3,4.
2. 1,5
3. –1

Utiliser les théorèmes de Pythagore et de Thalès

21 9

22 5,625

Utiliser les réciproques des théorèmes de Pythagore et de Thalès

23 $EF^2+FG^2=20$ et $EG^2=20$ donc le triangle EFG est rectangle en F d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

24 A, B et C et A, D et E sont alignés dans le même ordre et $\frac{AB}{AC}=\frac{1}{7}$ et $\frac{AD}{AE}=\frac{2}{2+12}=\frac{1}{7}$ donc (DB) et (EC) sont parallèles d'après la réciproque du théorème de Thalès.

Calculer un périmètre, une aire ou un volume

25 **1.** $4\pi\approx 12{,}6$ cm.
2. 8 cm.

26 $2\,250$ cm^2.

27 Un trapèze (rectangle).

28 Un carré.

Chapitre 1 Programmation en langage Python

↪Manuel p.16-43

Commentaires pédagogiques

L'objectif de ce chapitre est de formaliser les notions élémentaires de programmation dans le langage Python : variables, types, affectation, instructions conditionnelles, fonction et boucles
Ainsi, nous avons fait le choix d'activités d'introduction sur poste pour la découverte de ce langage qui est au cœur du programme de seconde, et ce, selon deux modalités :
• à partir du langage Python lui-même, quand le contexte en permet directement une compréhension intuitive ;
• à partir du langage de programmation par blocs Scratch, traité au cycle 4, en apprenant à le « traduire » dans le langage Python.
S'ensuivent un cours accompagné d'exercices corrigés, des exercices d'entrainement progressifs et des TP permettant une appropriation progressive des différentes notions par l'élève.
Comme dans tous les autres chapitres, on trouvera également une page axée sur la résolution de problèmes, en l'occurrence, sur la méthode de décomposition d'un problème en sous-problèmes, capacité centrale en programmation, ainsi que des pages « Je révise » grâce auxquelles l'élève pourra se tester avec le QCM et trouver des parcours de révision lui permettant d'appréhender sereinement l'intégralité du chapitre.
Les capacités mises en jeu dans ce chapitre sont :
• Comprendre et réaliser des affectations de valeur à des variables.
• Identifier les types de variables dans un programme donné et choisir le type adapté à une variable correspondant à une donnée concrète.
• Comprendre et écrire des instructions conditionnelles.
• Comprendre et écrire des fonctions.
• Comprendre et écrire des boucles `for`
• Comprendre et écrire des boucles `while`.

Corrigés des activités et des exercices

Pour prendre un bon départ p. 17

1 Affectation et affichage

Il dit **b vaut 26** car on a successivement :

a = 8
b = 5
a = 8 – 3=5
$$b = 5\times5+\frac{5}{5}=26$$

2 Instructions conditionnelles

1. Il dit **Relance le dé** car **dé ≠ 8**.
2. Il dit **Réussite critique !** car **dé = 8**

3 Répétition d'instructions

Il dessine un carré de 100 pas de côté puis il dit **26** car la variable **i** prend successivement les valeurs **1** puis **2** puis **3** puis **4**.

4 Boucle conditionnelle

Le lutin pense au nombre **2 592** car la variable **nombre** prend les valeurs successives **2; 12; 72; 432** toutes inférieures ou égales à **432** puis **2 592.**

Activités

p. 18-21

1 Types de valeurs

• **Durée estimée :** 15 min

• **Objectif** : Découvrir les quatre types au programme de seconde : les entiers (`int`), les flottants (`float`), les chaînes de caractères (`str`) et les booléens (`bool`).

1. a) Il est écrit `<class "int">` donc c'est `int`.

2. a) On obtient successivement

```
<class 'float'>
<class 'str'>
<class 'str'>
<class 'bool'>
<class 'bool'>
```

b) Respectivement `float`, `str`, `str`, `bool` et `bool`.

3. Voir le cours.

4. `7/3` est de type `float`.
`'Maths'` est de type `str`.
`987` est de type `int`.
`"8"` est de type `str`.

5. `7<9` est une inégalité vraie donc l'expression `7<9` est de type `bool` (booléen) et vaut `True`.

2 Affectation et affichage

• **Durée estimée :** 15 min

• **Objectif :** Réactiver la notion d'affectation vue *via* Scratch au collège.
On s'intéresse aussi à la notion d'affichage avec la commande `print`, ce qui permet de retravailler les types dans un contexte concret.

▶ A. Affectation et affichage pour les types numériques

1. *Print* veut dire « Imprimer » ou « afficher » dans ce cas.

2. b) `a` vaut `7` donc `b` vaut `2×7-3=11` qui est donc la valeur affichée.

3. a) Programme ① : `27` (en réalité, il affiche `26.999999999999996`)
Programme ② : `36`
programme ③ : `y`

4. b) La commande **Regrouper** .

c)

```
x=3/5
print("x vaut",x,"sous forme décimale")
```

▶ B. Affectation et affichage pour les chaînes de caractères

1. b) Car `a` n'est pas d'un type numérique (`int` ou `float`) mais est de type `str` : le « mot » `50` est donc répété 4 fois.

2. Il met les valeurs de ces deux variables l'une au bout de l'autre. On dit qu'il les concatène.

3 Instructions conditionnelles

• **Durée estimée :** 25 min

• **Objectif :** Réactiver la notion d'instructions conditionnelles vue *via* **Scratch** au collège.
À cette occasion, on découvrira le concept d'indentation qui est central dans la programmation en **Python** en général et dans ce chapitre en particulier.

> Il est à noter qu'on introduit également la commande `input` qui permet une interaction avec l'utilisateur et est donc particulièrement indiquée dans ce cadre des instructions conditionnelles puisqu'elle permet de travailler avec celles-ci sans que la valeur à tester :
> • soit déjà présente dans le programme, par exemple `a=3` suivie de `if a<4 :` ce qui n'est pas très motivant.
> • soit obtenue aléatoirement ou en argument d'une fonction, ce qui n'est pas évident en début de chapitre.

▶ A. Travail préliminaire : interaction avec l'utilisateur

1. b) Elle demande une valeur, attend que l'utilisateur la saisisse et l'affecte à une variable avec le type `str`.

2. a) Le programme ① affiche `28.0` et le programme ② affiche `28`.

b) Pour le programme ①, elle est de type `float` et pour le programme ②, elle est de type `int`.

▶ B. Instruction conditionnelle

1. Cette ligne peut se traduire par « Si revenu $\geqslant 3\times$loyer ».

Il faut donc avoir un revenu supérieur ou égal au triple du loyer pour déposer un dossier.

2. b) • Pour un loyer de 700 € € et un salaire de 2 000 €, le programme affiche `Bonne journée`.

• Pour un loyer de 540 € et un salaire de 1 900 € €, le programme affiche
`Vous pouvez déposer un dossier.`
`Merci d'avoir utilisé notre outil.`
`Bonne journée!`

c) Si la ligne **5** n'est pas indentée, le programme affiche **`Merci d'avoir utilisé notre outil.`** que la condition soit vérifiée ou non.

3. b) Le bloc **`else`** permet d'exécuter des instructions dans le cas où la condition dans la ligne commençant par **`if`** n'est pas vérifiée.
c) **`elif`** remplace un bloc **`else`** dans lequel il y aurait une instruction **`if`**.

```
loyer=float(input("Renseigner le loyer mensuel:"))
revenu=float(input("Renseigner le revenu mensuel :"))
if revenu >= 3*loyer:
      print("Vous pouvez déposer un dossier ")
elif revenu >= 2.5*loyer :
      print("Vous pouvez déposer un dossier, mais il a peu de chance d'aboutir ")
else :
      print("Dossier refusé, salaire minimum : ",3*loyer)
      print("Bonne journée")
```

4 Fonctions en langage Python

• **Durée estimée :** 25 min
• **Objectif :** Réactiver la notion de fonction vue *via* **Scratch** au collège.
On balaiera les notions de paramètres, les modes d'appel d'une fonction *via* la console ou un programme ainsi que le cas où la fonction n'a pas de paramètre.

▶ A. Découverte des fonctions

1. $7\times3\,600+12\times60+54=25\,974$ s
2. Il ne se passe rien.
3. Il est écrit **`25974`**

▶ B. Écriture d'une fonction

1.

```
def vitesse(distance,temps) :
    v=distance/temps
    return v
```

▶ D. Fonction appelée dans un programme

1. La dernière ligne est **`print("Vitesse=",vitesse(d,t),"m/s.")`** indentée.
3.

```
def vitesse2(d,h,m,s) :
    return vitesse(1000*d,conversion(h,m,s))
```

5 Boucle `for`

• **Durée estimée :** 15 min
• **Objectif :** Réactiver la notion de boucle **`Pour`** vue *via* **Scratch** au collège.
Il est à noter que la commande **Répéter** de **Scratch** ne met pas en jeu de variable compteur, c'est donc un des enjeux de la classe de Seconde.
On insistera également sur la syntaxe afin que l'élève comprenne bien que **`range(a,b)`** veut dire « de **`a`** à **`b-1`** ».
1. c) On ne voit pas clairement les différents affichages car le programme va trop vite.
2. b) Le fait que les messages soient différenciés (et qu'il y ait un délai entre eux) a permis de les différencier.
3. Le programme 2.

4.

```
for i in range(3,11):
    print("J'affiche le message ",i)
```

5.

```
for i in range(7):
    print("J'affiche le message ",i+9)
```

6 Boucle while

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Découvrir la notion de boucle `Tant que`. Au cycle 4, les élèves ont découvert les boucles **jusqu'à** dans le langage **Scratch**, il s'agit donc de faire le lien entre ces deux façons de décrire une même condition d'arrêt.

1. D'après ce modèle, la population augmentera de 6% chaque année.

2.

```
nb_animaux=200
annees_passees=0
while nb_animaux <=400 :
     nb_animaux=nb_animaux*1.06
     annees_passees=annees_passees+1
print("Prédateurs dans ",annees_passees,"annees")
```

Exercices résolus

À vous de jouer !

p. 23

1 `x=5` et `y=0`.

2 `a=1000.0` et `b=200.0`.

3 `x` est de type `float` et `y` de type `int`.

4 `a` est de type `str` et `b` de type `int`.

5 **a)** `x` vaut `8`.
b) `x` vaut `15`.

6 **a)** `z` vaut `12`.
b) `z` vaut `40`.

7

```
x=float(input("taille en m:"))
if x >= 1.20 :
    print("accès autorisé")
else :
    print("accès refusé")
```

8

```
x=float(input("x?"))
if x>=0 :
    print(-x**2)
else :
    print(3*x-1)
```

9 `0.375`

10 `17`

11

```
def ohm(R,I) :
    U=R*I
    return U
```

12

```
def moyenne(a,b,c) :
    m=(a+b+c)/3
    return m
```

13

```
55
77
103
```

14 `b=0` (dès le premier passage dans la boucle car `j=0` au départ)

15

```
2
8
32
128
512
```

16 `102`

17 Par exemple :

```
for x in range (97,122) :
    print(8*x-7)
```

18 Par exemple :

```
for i in range (10,16) :
    print(i**3)
```

19

```
p=1
while p<=1000000:
   print(p)
   p=p*5
```

20

```
x=0
while 8*x+900!=468:
    x=x-1
print(x)
```

Exercices résolution de problèmes

p. 31

21 Boucles `for` et `if/else`

Les différents sous-problèmes sont :

• générer un nombre entier aléatoire **x** entre 1 et 10,

• selon la valeur de **x**, il y aura donc une instruction **if**, traiter différentes instructions,

• une des instructions à traiter dans le bloc **if** est un affichage des nombres de la forme **i*x** où **i** varie entre 0 et 9 : cela se fera à l'aide d'une boucle **for**.

Voici un exemple de réponse rédigée.

```
import random
x=random.randint(1,10)
if x>4:
    for i in range(0,10):
        print(i*x)
else:
    print(x)
```

22 Boucles `for`

Notons préalablement qu'il faudra commencer par créer une variable **s** représentant la somme d'argent donc initialisée à 1000.

Les différents sous-problèmes sont alors :

• réaliser 10 fois de suite une multiplication de **s** par 1.02 suivie d'un ajout de 2000.

• réaliser de nouveau 8 fois de suite une multiplication de **s** par 1.01 suivie d'un ajout de 3000.

Voici un exemple de réponse rédigée.

```
s=10000
for a in range(1,11):
    s=1.02*s+2000
for a in range(11,18):
    s=1.01*s+3000
print(s)
```

Notez qu'on peut aussi considérer les sous-problèmes :

• réaliser 18 fois une instruction.

• cette instruction est différente les 10 premières fois et les 8 dernières.

Voici un autre exemple de réponse rédigée.

```
s=10000
for a in range(1,18):
    if a<=10:
        s=1.02*s+2000
    else:
        s=1.01*s+3000
print(s)
```

23 Boucles `for` et `while`

Notons préalablement qu'il faudra commencer par créer une variable **m** représentant la population de microbes initialisée à 1000.

Les différents sous-problèmes sont :

• répéter une instruction de multiplication par 1.05 tant qu'une condition est respectée (boucle **while**),

• répéter une instruction d'ajout de 50 tant qu'une condition est respectée (boucle **while**),

• répéter un affichage identique 10 fois de suite (boucle **for**),

• répéter une instruction de multiplication par 0.9 tant qu'une condition est respectée (boucle **while**).

Voici un exemple de réponse rédigée.

```
m=1000
while m<=3000:
    m=m*1.05
    print(m)
while m<=4000:
    m=m+50
    print(m)
for i in range(1,11):
    print(m)
while m>=10:
    m=0.9*m
    print(m)
```

Exercices d'entraînement p. 32-36

Je consolide mes acquis

24 **Si et sinon**

1. a) $22 \times 35 = 770$

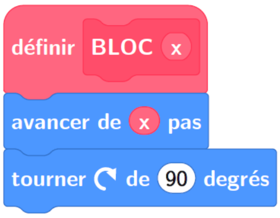
b) $45 \times 31{,}5 = 1417{,}5$.

2. Pour moins de 25 repas commandés, le tarif est de 35 euros par repas et il est de 31,5 euros pour 25 repas ou plus.

25 **Répéter jusqu'à**

Le lutin parcourt intégralement un hexagone régulier dont le côté mesure 25 pas puis parcourt encore deux de ses cotés. À chaque sommet, il s'arrête 2 secondes et dit `bonjour`.

26 **Répéter 4 fois**



Questions de cours

27 `str`

28 Pour `i` allant de `1` à `6`.

29 Il est décalé vers la droite.
Quand on a des instructions `if/else`, des fonctions ou des boucles `for` et `while`, ils sont toujours précédés d'une ligne finissant par `:`.

30 `True` ou `False`

31 `def truc(a,b):`

Choisir le bon type

32 `livre` : `str`
`qte` : `int`
`prix` : `float`

33 `ville` : `str`
`departement` : `str` ou `int`
`pluviometrie` : `float`
`ensoleillement` : `int`

34 `nom` : `str`
`temps` : `int`
`total` : `float`
`objectif` : `bool`

Comprendre l'affectation

35 **1.** `13.5`

2. C'est le prix d'un panier de 3 articles coutant 4,50 euros pièce.

36 **a)** `x=206.25` et `y=37.5`
b) `a=36` et `b=3.6`
c) `a="tic"` et `b="tictac"`

37 **a)** `mot1=mathsmathsphysique`
`mot2=mathsmathsphysique`
b) `a="3333"`
`b="33333"`

38 **a)** `True` **b)** `False` **c)** `False`

39 `total=n1*25.99+n2*39.99`

Déterminer un type

40 `prix` : `float`
`qte` : `int`

41 **1.** `x` est de type `float` pendant tout le programme
`y` est de type `int` à sa création à la ligne 2 puis devient de type `float` à partir de la ligne 3.
2. a est de type `int` pendant tout le programme
`b` est de type `int` à sa création à la ligne 2 puis devient de type `float` à partir de la ligne 4.

42 • `mot1` et `mot2` sont de type `str` durant tout le programme.
• `b` est de type `str` durant tout le programme.
`a` est de type `int` à sa création à la ligne 1 puis devient de type `str` à partir de la ligne 3.

43 Elles sont de type `bool`.

Comprendre des instructions conditionnelles

44 **a)** Si `a=5`, l'affichage est
`racine carrée : 2.23606797749979`
car `a` est supérieur ou égal à 0.
b) Si `a=-5`, l'affichage est `pas de racine carrée` car `a` n'est pas supérieur ou égal à 0.

45 **a)** Si `de=5`, l'affichage est `Au top` car `de` n'est pas égal à `6`.
b) Si `de=6`, l'affichage est `Peut mieux faire` car `de` est égal à `6`.

46 **a)** `reponse=4`
b) `reponse="parfait"`

47 **1. a)** `a=9`
b) `a=8`
2. Quand le couple (`de1`;`de2`) est (`4`;`8`); (`4`;`9`), (`4`;`10`), (`5`;`7`), (`5`;`8`), (`5`;`9`), (`5`;`10`), (`1`;`7`) et (`2`;`6`)

48 **a)** `z=5`
b) `z=14.78`
c) `79.507`(en réalité `79.50699999999999`pour des raisons propres à **Python**)

49 L'affichage est `dedans` quand `a` prend les valeurs : `9`, `10`, `11`, `12`, `13` ou `14`.

Écrire des instructions conditionnelles

50

```
x=float(input("Valeur de x ?"))
if x==1:
    print("pas d'image")
else :
    print(2*x/(x-1))
```

51

```
if d/t>130:
    print("excès de vitesse")
else:
    print("tout est en règle")
```

52

```
n=int(input("Nombre d'enfants
?"))
if n<=2:
    print(2+0.5*n)
else:
    print(3+(n-2))
```

ou plus simplement :

```
n=int(input("Nombre d'enfants
?"))
if n<=2:
    print(2+0.5*n)
else:
    print(n+1)
```

53

```
if x<=13 and x>=12:
    print("dedans")
else:
    print("dehors")
```

Comprendre une fonction

54 **a)** `108` **b)** `-276`

55 **1. a)** `5` **b)** `16.55`...
2. La fonction donne la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent `c1` et `c2`.

56 **1. a)** `3`
b) `-5`
2. il suffit (par exemple) d'écrire `if a<b :` à la ligne 2.

Écrire une fonction

57

```
def imc(m,t):
    return t/m**2
```

58 Histoire des maths

1.

```
def euler(s,a,f):
    return s-a+f
```

2. Pour une pyramide à base carrée par exemple, `euler(5,8,5)` donne bien `2`.

59

```
def masse(masse_vo,volu):
    return masse_vo*volu
```

60

```
def secteur(n,n1):
    return 360*n1/n
```

61 Analyser un problème pour le résoudre

```
def tarif(j,d):
    if d<=j*250:
        cout=52.16*j
    else:
        cout=52.16*j+0.31*(d-j*250)
    return cout
```

Comprendre une boucle `for`

62 $\frac{5}{6}$ puis $\frac{6}{7}$ puis $\frac{7}{8}$ puis $\frac{8}{9}$ puis $\frac{9}{10}$.

63 `1` puis `2` puis `4` puis `7` puis `11` puis `16`.

64 `67` puis `84` puis `103` puis `124` puis `147` puis `172` puis `199`.

65 `max` est initialisé à `-2200` et `max` prend la valeur de `f(j)` pour `j` entre `-2` et `5` si `f(j)` est supérieur à `max`.
Les valeurs successives de `f(j)` étant `-1000 ;0 ;800 ;1400 ;1800 ;2000`; `2000` et `1800`,
on constate que `max` prendra toutes ces valeurs jusqu'à atteindre `2000` puis n'évoluera plus.

66 **Esprit critique**
1. `total` vaut successivement `4`; `9` et `14`.
2. Car `for jour in range(1,annee)` veut dire « Pour `jour` allant de `1` à `annee-1` » donc, dans ce cas « pour `jour` allant de `1` à `364` » : il y aurait donc un jour manquant.

> Il peut paraître contre-intuitif que `range(1,annee+1)` veuille dire « de `1` à `annee` » et non « de `1` à `annee+1`» mais c'est pourtant le cas dans le langage **Python**, il faut y faire très attention car c'est une erreur classique de se tromper de borne supérieure du compteur dans ce type de boucle.

67 1. `1*1=1` et `10*10=100`
2. Il écrit les tables de multiplication.

Comprendre une boucle `while`

68 Environ `1105`.

69 On a successivement :
`u=5` et `n=1` ; `u=2.7` et `n=2` ; `u≈1.72` et `n=3` puis `u≈1.44` et `n=4`.
Comme `u<1.5` alors `n` vaut `4` en fin de programme.

70 `1`; `4`; `9` etc. c'est-à-dire les carrés parfaits jusqu'à ce que l'un soit égal à `400` (c'est-à-dire le carré de `20`).

71 1. Le programme affiche `2` car on a successivement :
`acide=20` et `n=0` puis `acide=2` et `n=1` puis `acide=0.2` et `n=2`.
Comme `acide<=1`, `n` vaut `2` .

2.

```
acide=100
n=0
while acide>=2 :
    acide=dilu(acide,50)
    n=n+1
print(n)
```

72 • La population augmente de 1% par heure jusqu'à dépasser `1500` .
• Elle augmente ensuite de 5 bactéries par heure jusqu'à dépasser `1600` .
• Elle stagne ensuite pendant 5 heures.
• Enfin, elle diminue de 5% % jusqu'à ce qu'il y ait moins d'une bactérie, c'est-à-dire jusqu'à extinction.

Écrire une boucle `for`

73

```
for i in range(12,21):
    print(1/i)
```

74

```
for i in range(5,26):
    print(fonct(i))
```

75

```
for x in range(1,11):
    if 3*x**2-36*x+105 >0:
        print(3*x**2-36*x+105)
```

76

```
for i in range(20,51):
    print(fonct(i/10))
```

77 **Décomposer un problème en sous-problèmes**

```
n=int(input("Nombre de personnes ?"))
masse_totale=0
for i in range(1,n+1):
    masse=float(input("Masse du sac ?"))
    masse_totale=masse_totale+masse
print(masse_totale/n)
```

78

```
for i in range(4,618):
    print(2*i)
```

79

```
for i in range(2,11):
    print(i**2)
```

Écrire une boucle while

80

```
epaisseur=0.1
n=0
while epaisseur<=1000:
    epaisseur=epaisseur*2
    n=n+1
print(n)
```

81

```
nombre=3
ecart=1
while nombre<=1000:
    nombre=nombre+ecart
    ecart=ecart+1
    print(nombre)
```

82

```
ec=550
annee=2005
while ec>=300:
    ec=ec*0.915
    annee=annee+5
print(annee)
```

83

```
import random
x=random.randint(1,6)
proposition=-1
nombre_essais=0
while proposition!=x and nombre_essais<3:
    proposition=int(input("Proposition ?"))
    nombre_essais=nombre_essais+1
if proposition==x:
    print("Gagné")
else:
    print("Perdu")
```

À chacun son rythme

84

Énoncé A

```
age=int(input("Age ?"))
if age>=18 :
      print("12.50 euros")
else:
      print("9 euros")
```

Énoncé B

```
def tarif(n1,n2):
    return n1*12.5+n2*9
```

Énoncé C

```
nb_places=200
while nb_places !=0:
    print(nb_places, "place(s) restante(s)")
    n1=int(input("Nombre de places pour majeurs ?"))
    n2=int(input("Nombre de places pour mineurs ?"))
    print(n1*12.5+n2*9,"euros")
    nb_places=nb_places-(n1+n2)
```

Pour l'énoncé A, il s'agit de vérifier qu'un programme fonctionne et, sinon, d'en repérer les erreurs et les corriger. Cela permet donc de tester des compétences assez basiques.
Pour l'énoncé B, on écrit une fonction simple à partie de spécifications détaillées. Le passage de « comprendre un programme » à « écrire un programme » est traditionnellement assez délicat, en particulier en classe de seconde, il y a donc ici une difficulté supérieure à celle de l'énoncé A.
Pour l'énoncé C, il s'agit d'écrire un programme complexe, nécessitant l'utilisation évoluée d'une boucle, ce qui nécessite une maîtrise avancée des notions de ce chapitre.

Exercices de synthèse

p. 37

85 Type et affectation

a) `x=64` de type `int` et `y=0.4166`… de type `float`.
b) `x=40` de type `int` et `y=0.4166`… de type `float`.
c) `u=1215` de type `int`.

86 Abonnement ou pas

1. a) `Payez à la séance`
b) `Abonnez-vous !`
2. a) Le prix de l'abonnement est de120 euros.
b) Le prix à la séance est de 3,50 euros.

87 Fonction et boucle

1. a) `29`
b) `35`
2. a) `132.0`
`144.0`
`156.0`
`168.0`
b) `204.0`

88 Recensement de population française

```
population=66774.5
annee=2017
while population<=80000:
    population=population+96
    annee=annee+1
print(annee)
```

89 Images par une fonction

1.

```
def fonc(x):
    return 7*x**2+3*x-5
```

2.

```
for i in range(4,11):
    print(fonc(i))
```

3.

```
for i in range(81,91):
    print(fonc(i/10))
```

90 Type de performance

1. `nom` : `str`
`age` : `int`
`cooper` : `bool`

2. a)

```
def VO(d):
    return (d-505)/45
```

b)

```
if cooper:
    d=int(input("Dist. Cooper en m: "))
    print("VO2max : ",VO(d))
else:
    print("Faites le test de Cooper !")
```

91 Aiguillages informatisés

```
def aiguillage(dist_g,dist_d):
    if dist_g == dist_d:
        print("Attention !")
    if dist_g<=dist_d:
        signal="gauche"
    else :
        signal="droite"
    return signal
```

Exercices d'approfondissement

p. 38

92 Histoire des maths

1. a) $\pi - 0{,}01 < x < \pi + 0{,}01$.

b)

```
def appro(x,e):
    if x>math.pi-e and x<math.pi+e:
        reponse=True
    else :
        reponse=False
    return reponse
```

2.

```
for i in range(1,1001):
    for j in range(1,1001) :
        if appro(i/j,0.001) :
            print(i,"/",j)
```

93 Quotient de deux entiers

```
def quotient(a,b):
    q=0
    while a>=b:
        a=a-b
        q=q+1
    print(q)
```

94 Suite de Syracuse

1. En partant de `12` par exemple (mais on peut affecter une autre valeur à `u`) :

```
u=12
print(u)
for i in range(1,100):
    if u%2==0:
        u=u/2
    else :
        u=3*u+1
    print(u)
```

2. On remarque une stabilisation des valeurs qui se répètent.

95 Un simple échange

```
a=float(input("Valeur de a : "))
b=float(input("Valeur de b : "))
c=a
a=b
b=c
```

Vers la 1re

96 Vers la spécialité Maths

1. $u_2=u_{1+1}=0{,}5\,u_1-8=0{,}5\times(-7)-8=-11{,}5$.

$u_3=u_{2+1}=0{,}5\,u_2-8=0{,}5\times(-11{,}5)-8=-13{,}75$

.

2.

```
u=2
print(u)
for i in range(1,21):
    u=0.5*u-8
    print(u)
```

Ces termes se rapprochent de `-16` .

96 Vers STL-ST2S

1.

```
def calories(lip,pro,glu,fib,masse):
    return
(9*lip+4*pro+4*glu+2*fib)*masse/100
```

2. a) On trouve `140.76` qui est très proche des 142 kcal annoncées.

b) Il contient quasiment le double de calories pour une masse 5fois moindre, il est donc 10 fois plus calorique et probablement de mauvaise qualité nutritionnel (en effet, c'est une étiquette de biscuit apéritif).

Préparer le contrôle
Je me teste p. 40

Objectif 1 Manipuler les variables

98 B

99. B et D

100 B

101 B

Objectif 2 Manipuler les instructions conditionnelles

102 A, B et D

103 C

Objectif 3 Manipuler les fonctions

104 D

105 D

Objectif 4 Manipuler les boucles

106 A, B et C

107 A

108 A et C

Préparer le contrôle
Je m'entraîne p. 41

Objectif 1 Manipuler les variables

109 `pays` : `str`
`vaccins` : `int`
`temp` : `float`

110 **1.** `a=4` et `b=16`.
2. a) Par `4.25`.
b) `a` deviendrait de type `float` et non plus `int`.

111 **a)** `False`
b) `True`
c) `True`

Objectif 2 Manipuler les instructions conditionnelles

112 a) `1 et -2 : pas même signe`
b) `6 et 3 : même signe`

113

```
import random
y=random.randint(12,20)
if y<15:
    c=y
else:
    c=y/2
```

114

```
import random
y=random.randint(12,20)
if y<15 or y>18:
    c=y
else:
    c=0
```

Objectif 3 Manipuler les fonctions

115 a) `20` b) `impossible !`

116

```
def freq(sous_pop,pop):
    return sous_pop/pop*100
```

117

```
def va(x):
    if x>=0:
        v=x
    else:
        v=-x
    return v
```

Objectif 4 Manipuler les boucles

118 1.
```
191
193
195
197
199
```
2.

```
for e in range(95,100) :
    print(2*e+1)
```

119

```
s=1
while sdb(s)<=6000:
    print(sdb(s))
    s=s+0.5
```

120

```
total=0
for i in range(1,36):
    n=float(input("Nouvelle note"))
    total=total+n
moyenne=total/35
print(moyenne)
```

Travaux pratiques p. 43-43

1 Mathématiques et langage Python

• **Durée estimée :** 40 min
• **Objectif :** Découvrir que le langage **Python** offre une large éventail de fonctionnalités permettant de faire des mathématiques.

▶ A. Découverte des fonctions intégrées

1. a) On obtient successivement `0.33` ; `0.3333` ; `0.333333` et `5.42857`.
b) `round(x,n)` arrondi `x` à `n` chiffres après la virgule.
2. a) Le quotient est 14, le reste est 5.
b) On obtient successivement `14` et `5`.
c) `a//b` semble donner le quotient de `a` par `b` et `a%b` semble donner le reste de la division de `a` par `b`.

▶ B. Découverte du module `math`

2. a) On obtient successivement `3` ; `10` ; `5` ; `1.7320508075688772` et `4.123105625617661`.
b) Elle donne $\sqrt{x}$

3. **a)** On obtient `3.141592653589793`.
b) Elle donne π .
4. **a)** On obtient successivement `4` ; `7` et `22`.
b) Elle donne le pgcd de `a` et `b`.

▶ C. Applications

2.

```
def simpli(num,denom):
    print("numérateur : ",num/math.gcd(num,denom))
    print("dénominateur : ",denom/math.gcd(num,denom))
```

3.

```
def divi(a,b):
    if a%b==0:
        reponse=True
    else:
        reponse=False
    return reponse
```

4.

```
def hypo(L1,L2):
    return(round(math.sqrt(L1**2+L2**2),3))
```

5. **a)**

```
def inv_cos(adj,hyp):
    return math.degrees(math.acos(adj/hyp))
```

b)

```
def inv_sin(opp,hyp):
    return math.degrees(math.asin(opp/hyp))
```

```
def inv_tan(opp,adj):
    return math.degrees(math.atan(opp/adj))
```

2 Comprendre les impôts

• **Durée estimée :** 45 min
• **Objectif :** Utiliser le langage Python pour créer un programme utile dans un contexte concret : le calcul de l'impôt. Pour cela, il est plus aisé de travailler avec la commande **`elif`** qui est donc introduite en préambule.
Il est à noter que ce TP n'est pas du tout évident, que ce soit dans les notions de programmations utilisées ou la traduction mathématique du mode de calcul de l'impôt dans les cas les plus complexes.

▶ A. La commande `elif`

3. Le programme affiche :
• `super` si `a < 0`
• `génial` si `0` $\leqslant$ `a < 5`
• `incroyable` si `5` $\leqslant$ `a < 10`
• `fantastique` si `a` $\geqslant$ `10`
4. Cela permet d'éviter d'avoir des `if/else` imbriqués.

▶ B. Calcul des impôts

1. Sur les $30\,000$ euros, il y a :

$10\,777$ dans la tranche 1,

$27478-10\,777=16\,701$ dans la tranche 2 à 11 % soit $16\,701\times0{,}11=1\,837{,}11$ d'impôts

et $30\,000-27\,478=2\,522$ dans la tranche 2 à 30 % soit $2\,522\times0{,}30=756{,}60$ euros d'impôts.

Au total, cela fait bien $2\,593{,}71$ euros d'impôts.

Il reste à calculer $\dfrac{2\,593{,}71}{30\,000}\approx0{,}086\,5$ soit $8{,}65$ %.

2. $\dfrac{30\,000}{0{,}9}$ soit environ $33\,333{,}33$ euros.

3. a)

```
def impot1(rev_imp):
    if rev_imp<10777:
        impot=0
    elif rev_imp<=27478:
        impot=0.11*(rev_imp-10777)
    elif rev_imp<=78470:
        impot=0.11*(27478-10777)+0.3*(rev_imp-27478)
    elif rev_imp<=168994:
        impot=0.11*(27478-10777)+0.3*(78570-27478)+0.41*(rev_imp-78570)
    else:
        impot=0.11*(27478-10777)+0.3*(78570-27478)+0.41*(168994-
78570)+0.45*(rev_imp-168994)
    return impot
```

4.

```
def impot2(rev_tot):
    return impot1(0.9*rev_tot)
```

5. a)

```
def impot3(rev_tot,parts):
    return parts*impot2(rev_tot/parts)
```

b) On peut déjà écrire une fonction donnant le nombre de parts à partir du nombre d'enfants (voir l'exercice **52**).

```
def parts(nb_enfants):
    if nb_enfants<=2:
        p=2+0.5*nb_enfants
    else:
        p=nb_enfants+1
    return p
```

Puis l'utiliser pour créer la fonction souhaitée :

```
def impot4(rev_tot,nb_enfants):
    return impot3(rev_tot,parts(nb_enfants))
```

Chapitre 2 Nombres et calculs

→Manuel p.44-69

Commentaires pédagogiques

Ce chapitre prolonge le thème « Nombres et calculs » du cycle 4 avec pour objectifs d'approfondir la connaissance des différents types et ensembles de nombres et de développer la pratique du calcul numérique. Dans un premier temps, lesrègles de calculs sur les puissances sont généralisées à tous les nombres réels avec des puissances relatives. On formalise le statut des racines carrées en tant que nombres et on démontre leurs règles de calculs.
Dans un deuxième temps, l'étude des multiples, diviseurs et des nombres premiers permet à la fois de retravailler sur la décomposition en produit de facteurs premiers et d'exiger de présenter les résultats fractionnaires sous forme irréductible mais permet également de travailler l'écriture littérale ainsi que les démonstrations.
Dans une dernière partie, nous faisons la synthèse des différents types de nombres rencontrés par les élèves jusqu'à présent, en y ajoutant les nombres irrationnels.
Un soin particulier a été apporté aux démonstrations (par l'absurde, par disjonction de cas, par contraposée) montrant qu'un nombre n'est pas décimal ou qu'un autre est irrationnel.
Les nombreux exercices sont variés, tant au niveau des méthodes attendues (calculs numériques, calcul littéral, application en situation, démonstrations) que des difficultés.
Les capacités mises en jeu dans ce chapitre sont :

- Effectuer des calculs numériques mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires.
- Modéliser et résoudre des problèmes mobilisant les notions de multiple, de diviseur, de nombre pair, de nombre impair, de nombre premier.
- Présenter les résultats fractionnaires sous forme irréductible.
- Associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.
- Donner un encadrement, d'amplitude donnée, d'un nombre réel par des décimaux.

Corrigés des activités et des exercices

Pour prendre un bon départ p. 45

1 Calculer avec la règle des signes et les priorités

$A=-40$ $B=-44$ $C=8$
$D=-20$ $E=84$ $F=-1$

2 Utiliser les puissances de 10

1. $F=10^{-1}$ $G=10^{3}$ $H=10^{-4}$
$I=10^{0}=1$ $J=10^{4}$ $K=10^{-4}$
2. $L=12\,500$ $M=2{,}156$ $N=0{,}698$

3 Utiliser la racine carrée en géométrie

ABC est un triangle rectangle en A, donc d'après le théorème de Pythagore
$BC^2=AB^2+AC^2=4^2+8^2=80$
Donc $BC=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$.

4 Utiliser les critères de divisibilité

1. a) 18, 60, 36, 426 et 4238.
b) 18, 60, 36 et 426.
c) 60 et 235
d) 18 et 36

2. $18=2\times3^2$
$60=2^2\times3\times5$,
$36=2^2\times3^2$
$426=2\times3\times71$,
$235=5\times47$
$4\,238=2\times13\times163$
$6\,139=7\times877$

5 Connaître la division euclidienne

a) Quotient : 23 Reste : 0
b) Quotient : 43 Reste : 7

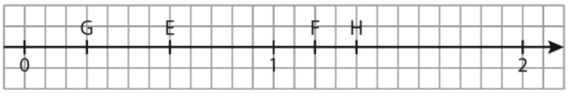
6 Calculer avec des fractions

$A = \dfrac{56}{15}$ $\qquad B = 7$ $\qquad C = \dfrac{11}{5}$

$D = -\dfrac{19}{10}$ $\qquad E = \dfrac{9}{14}$ $\qquad F = \dfrac{2}{3}$

7 Repérer des nombres sur une droite graduée

1.



2. $C(24)$ $\qquad D(18)$ $\qquad E(32)$

Activités

p. 46-47

1 Calculer avec des puissances

• **Durée estimée :** 15 min

• **Objectif** : Définir les règles de calculs sur les puissances, aussi bien avec des exposants positifs que négatifs.

1. a) 8 **b)** $\dfrac{1}{8}$ **c)** -8 **d)** -8 **e)** $-\dfrac{1}{8}$

2. a) $8^2 \times 8^3 = \underbrace{\underbrace{8\times 8}_{\text{2 facteurs}} \times \underbrace{8\times 8\times 8}_{\text{3 facteurs}}}_{\text{5 facteurs au total}} = 8^5$

$7^5 \times 7^{-4} = \underbrace{7\times 7\times 7\times 7\times 7}_{\text{5 facteurs}} \times \dfrac{1}{\underbrace{7\times 7\times 7\times 7}_{\text{4 facteurs}}} = 7^{5+(-4)} = 7^1$

b) $a^5 \times a^8 = \underbrace{\underbrace{a\times \ldots \times a}_{\text{5 facteurs}} \times \underbrace{a\times a\times \ldots \times a\times a}_{\text{8 facteurs}}}_{\text{13 facteurs au total}} = a^{13}$

c)

Pour tous nombres n et p, on a $a^n \times a^p = a^{n+p}$

3. a) $\dfrac{6^5}{6^2} = \dfrac{6\times 6\times 6\times 6\times 6}{6\times 6} = 6^{5-2} = 6^3$

b) $\dfrac{13^7}{13^{-4}} = \dfrac{13\times \ldots \times 13}{\dfrac{1}{13\times 13\times 13\times 13}}$

$= 13\times \ldots \times 13\times 13\times 13\times 13\times 13 = 13^{7-(-4)} = 13^{11}$

$\dfrac{a^{-3}}{a^2} = \dfrac{\dfrac{1}{a\times a\times a}}{a^2} = \dfrac{1}{a\times a\times a} \times \dfrac{1}{a^2} = a^{-3-2=a^{-5}}$

c) Pour tous nombres n et p, on a $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

4. a) $\left(5^2\right)^3 = (5\times 5)\times(5\times 5)\times(5\times 5)$

Il y a 6 facteurs

b) $(a\times a\times a)^5 = (a\times a\times a)\times \ldots \times (a\times a\times a)$

Il y a 15 facteurs.

$\left(a^5\right)^{-8} = \dfrac{1}{\left(a^5\right)^8} = \dfrac{1}{(a\times a\times a\times a\times a)\times \ldots \times (a\times a\times a\times a\times a)}$

Il y a 40 facteurs au dénominateur.

c)

Pour tous nombres entiers n et p, on a

$\left(a^n\right)^p = a^{n\times p}$

2 Calculer le produit de deux racines carrées

• **Durée estimée :** 15 minutes

• **Objectif :** établir la règle du produit de deux racines carrées.

• **Durée estimée :** 15 minutes

• **Objectif :** Établir la règle du produit de deux racines carrées.

1. a) $\mathcal{A}_{\text{POM}} = \dfrac{(4+9)\times 6}{2} = 39$

b) D'après le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles POH et PHM:

$PO^2 = 6^2 + 9^2 = 117$

$PM^2 = 4^2 + 6^2 = 52$

De plus $MO^2 = (4+9)^2 = 169$

On a $MO^2 = PO^2 + PM^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle POM est rectangle en P.

c) $\mathcal{A}_{POM} = \dfrac{\sqrt{117}\times\sqrt{52}}{2}$

d) $\sqrt{117}\times\sqrt{52} = 39\times 2 = \sqrt{78^2} = \sqrt{6\,084}$

e) $117 = 3^2 \times 13$ et $52 = 2^2 \times 13$.

Donc $117\times 52 = 2^2 \times 3^2 \times 13^2$

f) $6\,084 = 2^2 \times 3^2 \times 13^2 = (2\times 3\times 13)^2$ donc

$\sqrt{117}\times\sqrt{52} = \sqrt{117\times 52}$

g) $\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$ pour a et b positifs.

2.a) Pour que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ existent, il faut que a et b soient positifs.

b) $\left(\sqrt{a\times b}\right)^2 = a\times b$ et

$\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{a}^2 \times \sqrt{b}^2 = a\times b$

Comme ils ont le même carré, alors ils sont égaux ou opposés.

Étant tous les deux positifs, ils sont donc égaux :
$\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$

3. $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$ Il suffit de trouver un contre-exemple : $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ tandis que $\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$.

3 Le crible d'Ératosthène

- **Durée estimée :** 10 minutes
- **Objectif :** Découvrir un algorithme permettant de lister tous les nombres premiers inférieurs à 102.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~
7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~
19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~
~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~
37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~
43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~
~~49~~	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~
~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~
67	~~68~~	~~69~~	~~70~~	71	~~72~~
73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~
79	~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~
~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~
97	~~98~~	~~99~~	~~100~~	101	~~102~~

1. a) 1 est rayé en orange et les multiples de 2 sont rayés en rouge.
b) 3 est premier car il n'est divisible que par 1 et par lui-même il est entouré en noir.
2. a) Les multiples de 3 non déjà rayés sont rayés en bleu.
b) 5 est premier car il n'est divisible que par 1 et lui-même. Il est entouré en noir.
3. On raye en violet tous autres multiples de 5 non déjà rayés. On continue ainsi.
Tous les nombres qui ne sont pas des nombres entourés sont tous des nombres premiers car ils ne sont multiples d'aucun nombre qui les précède (vu qu'ils n'ont pas été rayés).
4. a) La majorité des nombres premiers se situent dans la première et dans la cinquième colonne.
b) Non.

c) Soit p un nombre premier différent de 2 et de 3. On fait la division euclidienne de p par 6.
On note r le reste alors on peut écrire $p=6k+r$ avec $r<6$.
Le nombre r peut potentiellement prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.
- Si $r=0$ alors $p=6k$, donc p est divisible par 6, ce qui est impossible car p est un nombre premier.
- Si $r=2$ alors $p=6k+2=2(3k+1)$ donc p est divisible par 2, ce qui entraine $p=2$. Or $p\neq 2$, donc ce cas est impossible.
- Si $r=3$ alors $p=6k+3=3(2k+1)$ donc le même argument que précédemment (en remplaçant 2 par 3) montre que ce cas est impossible.
- Si $r=4$ alors $p=6k+4=2(3k+2)$ donc p est divisible par 2, ce qui est impossible encore.Finalement, il ne reste que deux possibilités : $r=1$ ou $r=5$. Un nombre premier p différent de 2 et de 3 est donc toujours de la forme $6k+1$ ou $6k+5$.

4 $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

- **Durée estimée :** 15 minutes
- **Objectif :** Démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

1. a) $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ où $\frac{p}{q}$ est un quotient irréductible.
Si deux nombres sont égaux, alors leurs carrés le sont également donc

$$\sqrt{2}^2=\left(\frac{p}{q}\right)^2 \text{ d'où } 2=\frac{p^2}{q^2}.$$

On a donc $2q^2=p^2$.

b) Voici les chiffres des unités de :

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Et de :

q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$2q^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

c) Il faut trouver un chiffre commun aux deux tableaux. Le seul chiffre commun est 0. Donc le chiffre des unités possible pour p est 0 et pour q est 0 ou 5.

d) Les résultats précédents indiquent que p est un multiple de 10 et que q est un multiple de 5 donc on peut simplifier $\frac{p}{q}$ par 5.

e) C'est en contradiction avec le fait que $\frac{p}{q}$ est irréductible, donc notre hypothèse de départ est fausse, ce qui signifie que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

2. On suppose que $\sqrt{3}$ est rationnel donc peut s'écrire sous la forme $\sqrt{3}=\frac{p}{q}$ avec p et q deux entiers relatifs tels que $\frac{p}{q}$ est irréductible. On a alors $p^2=3q^2$.

Le chiffre des unités de :

q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$3q^2$	0	3	2	7	8	5	8	7	2	3

Les seuls chiffres communs sont 0 et 5 donc les chiffres des unités possibles pour p et q sont 0 et 5, ce qui signifie qu'ils sont tous deux divisibles par 5. On aboutit à la même absurdité que pour $\sqrt{2}$. Donc $\sqrt{3}$ est également irrationnel.

Exercices résolus

À vous de jouer ! p. 49

1 $E=6^{-6}$ $F=7^{-5}$
$G=5{,}6^{-21}$ $H=1\,235^{28}$

2 $I=10^{78}$ $J=12^{24}$
$K=7$ $L=21^2$

3 **a)** $5\sqrt{6}$ **b)** $6\sqrt{6}$ **c)** $11\sqrt{6}$

4 **a)** $6\sqrt{3}$ **b)** $3\sqrt{3}$ **c)** $11\sqrt{3}$

5 **a)** $3\sqrt{7}$ **b)** $3\sqrt{11}$ **c)** $5\sqrt{2}$

6 **a)** $2\sqrt{3}$ **b)** $4\sqrt{5}$ **c)** $8\sqrt{6}$

7 **a)** Faux, contre-exemple : $5+7=12$
b) Vrai, $2k+2k'=2(k+k')$ avec $k\in\mathbb{N}$ et $k'\in\mathbb{N}$ donc $(k+k')\in\mathbb{N}$
c) Faux : contrexemple : $4+9=13$

8 ka et $k'a$ sont deux multiples de a avec a,k et k' des entiers. $ka+k'a=(k+k')a$ avec $k+k'$ un entier donc la somme de deux multiples de a est bien un multiple de a.

9 La contraposée est : "Si a est impair alors a^2 est impair."
Prouvons-la :
$a=2k+1$ avec k entier donc
$a^2=(2k+1)^2=(2k+1)(2k+1)=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$
et $2k^2+2k$ est entier donc a^2 est bien impair.
La contraposée est prouvée donc la propriété de départ est également vraie.

10 $\sqrt{487}\approx 22{,}1$
487 n'est divisible par aucun des nombres premiers suivants : 2,3,5,7,11,13,17 et 19 donc 487 est premier.

11 $301=7\times 43$ donc il a des diviseurs autres que 1 et lui-même donc il n'est pas premier.

12 53 et 79.

13 Si $\frac{5}{7}$ est décimal alors il existe des entiers a et n tels que $\frac{5}{7}=\frac{a}{10^n}$. On a alors $7a=5\times 10^n$. L'unique décomposition en produit de facteurs de 5×10^n ne contient que des 2 et des 5. On obtient donc une contradiction donc $\frac{5}{7}$ n'est pas décimal.

14 $-5=-\frac{5}{10^0}$ $\frac{7}{2}=3{,}5=\frac{35}{10^1}$
$0{,}034=\frac{34}{10^3}$ $7\,584\,000=\frac{7\,584\,000}{10^0}$
Donc tous ces nombres sont décimaux.

15 **a)** $1{,}4<\frac{10}{7}<1{,}5$

b) $1{,}42<\frac{10}{7}<1{,}43$

c) $1{,}428<\frac{10}{7}<1{,}429$

16 **a)** $7{,}45<7{,}4568<7{,}46$

b) $0{,}55<\frac{5}{9}<0{,}56$

c) $0{,}22<2{,}24\times10^{-2}<0{,}23$

Exercices résolution de problèmes

p. 54

L'objectif ici est de rédiger une solution en veillant à respecter les conditions d'application d'une propriété et les bonnes implications.

17 Produit et somme de multiples

Afin de rédiger correctement les solutions, on traduit le terme de « multiple » à l'aide de l'écriture littérale en prenant soin d'utiliser deux lettres différentes pour les deux multiples utilisés : $N=4k$ et $N'=4k'$.

Dans un deuxième temps, il faut vérifier que les nouveaux coefficients kk' ou $k+k'$ sont bien des entiers.

a) Vrai. Soit N et N' des multiples de 4.

Il existe deux entiers k et k' tels que

$N=4k$ et $N'=4k'$, alors

$N\times N'=4\times k\times4\times k'=16\times(kk')$

On en déduit que NN' est un multiple de 16 car kk' est un entier (car produit de deux entiers).

b) Avec les mêmes notations, on a

$N+N'=4k+4k'=4(k+k')$. On en déduit que la somme de deux multiples de 4 est un multiple de 4 car $k+k'$ est bien un entier.

c) Faux. Contre-exemple : $8+12=20$. 8 et 12 sont des multiples de 4 mais 16 n'est pas un multiple de 16.

18 Différences

Attention : le titre de l'exercice parle de différences. Il faut traiter l'exercice avec la différence, la somme sera traitée dans l'exercice **21**. La méthode est identique.

Soit N et N' deux entiers divisibles par 9, alors il existe deux entiers k et k' tels que

$N=9k$ et $N'=9k'$.

$N-N'=9k-9k'=9(k-k')$

On en déduit que leur différence est divisible par 9 car $k-k'$ est bien un entier.

19 Réciproque

1. On pensera à rédiger la réciproque même si ce n'est pas demandé : Si un entier est un multiple de 3 et de 5 alors il est aussi un multiple de 15. Ici, on ne demande pas de justifier la réponse, seulement une conjecture.

1. Soit N un entier multiple de 15. Il existe un entier k tel que $N=15k$. Or $15=3\times5$ donc $N=3\times5\times k$. On pose $k'=3k$ et $k''=5k$, on obtient deux nouveaux entiers tels que $N=5k'=3k''$, donc N est aussi un multiple de 3 et un multiple de 5.

2. La réciproque semble vraie.

20 Multiples de 17

Il faut remarquer que 4442 et 222 100 sont des multiples de 221.

221 est divisible par 17 donc il existe k tel que $221=17k$.

$442=2\times221=2\times17\times k=17\times(2k)$

$22100=221\times100=17\times k\times100=17\times(100k)$

$2k$ et $100k$ sont des entiers donc 442 et 22 100 sont divisibles par 17.

21 Divisibilité d'une somme

Ici, les connecteurs logiques Si et Alors sont importants car la réciproque est fausse.

Soit a et b deux entiers divisibles par 7, alors il existe deux entiers k et k' tels que $a=7k$ et $b=7k'$.

$a+b=7k+7k'=7(k+k')$

On en déduit que leur somme est divisible par 7 car $k+k'$ est bien un entier.

22 Double et parité

Ici, la disjonction de cas est inutile mais on peut en profiter pour rappeler l'écriture littérale des nombres pair ($2n$) et impair $(2n+1)$.

Le double d'un nombre est pair par définition quel que soit la parité du nombre de départ. En effet le double d'un entier N s'écrit $2N$.

23 **Triple et parité**

Ici, la disjonction de cas est obligatoire.
Soit N un nombre pair donc il existe n tel que $N=2n$. Le triple de N s'écrit $3N=3\times 2n=2\times 3n$ donc le triple d'un nombre pair est pair.
Soit N un nombre impair donc il existe n tel que $N=2n+1$. Le triple de N s'écrit $3N=3\times(2n+1)=6n+3=3(2n+1)$ donc le triple d'un nombre impair est impair.

Exercices automatismes p. 55

Rituel 1

24 **a)** 47 800 **b)** 478 **c)** 4 780

25 **a)** 0,125 **b)** 0,125 **c)** 0,012 5

26 **a)** 4,265 **b)** 0,004 59 **c)** 65,4

27 **a)** 9 870 **b)** 5 640 **c)** 3

28 **a)** 10^2 **b)** 10^5 **c)** 10^{-2}

29 $\frac{960}{3}=320$ soit environ 300.

30 **a)** 5000 **b)** 3,2 **c)** 0,0085

31 **a)** $\frac{125}{10^3}$ **b)** $\frac{286}{10^2}$ **c)** $\frac{75}{10^2}$
d) $\frac{7}{10^3}$ **e)** $\frac{9\,672}{10^1}$ **f)** $\frac{2387}{10^2}$

32 **a)** 10^2 **b)** 10^8 **c)** 10^{-4}

33 $-3;-1;1;3;5$

34 4,5687 ; 45,687; 456,87; 4568,7 et 45687 .

35 **a)** $\frac{1}{10}$ **b)** $\frac{7}{10}$ **c)** $-\frac{3}{10}$ **d)** $\frac{2}{5}$

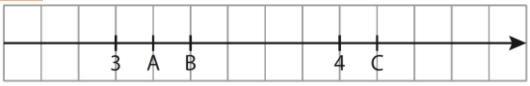
36 **a)** $-\frac{17}{3}$ **b)** $\frac{10}{3}$ **c)** $\frac{15}{2}$

37 **a)** $\mathcal{S}=\left\{\frac{7}{3}\right\}$ **b)** $\mathcal{S}=\{10\}$

38 **a)** $\mathcal{S}=\left\{\frac{5}{7}\right\}$ **b)** $\mathcal{S}=\left\{-\frac{9}{4}\right\}$

39 **a)** $x=7$ **b)** $x=\frac{1}{13}$

40



41 $P\left(\frac{10}{3}\right)$ $Q\left(\frac{14}{3}\right)$ $R\left(\frac{20}{3}\right)$

42 **a)** 4900 **b)** 0,09 **c)** 0,0064

43 **a)** 0,65 **b)** 823 **c)** 12,63

Exercices d'entraînement p. 56-61

Je consolide mes acquis

44 **Calculs**

$A=-16$ $B=-43$ $C=2$
$D=-64$ $E=-210$ $F=43$

45 **Multiplier par une puissance de 10**

$L=0{,}963$ $M=54\,120$
$N=1{,}23$ $P=780$

46 **Critères de divisibilité**

a) 6; 12; 18; 24; …; 600
b) 10; 20; 30; 100; 2000
c) 9; 18; 27; …; 81; 90; 900
d) 10; 100; 1000; …; 1000000

47 **Division euclidienne**

573 divisé par 25 :
quotient : 22, reste : 23
573 divisé par 22 :
quotient : 26, reste : 1

48 Scratch

Attention : il faut comprendre **m** et **n** , au lieu de **a** et **b** dans les questions de l'exercice.

1. Pour **m = 6** , **n = 9** et **diviseur= 5**, on obtient : **Perdu !**

Pour **m = 6** , **n = 9** et **diviseur= 3**, on obtient : **Gagné !**

2. Ce script sert à vérifier si le diviseur est commun aux deux nombres donnés.

49 Produits de facteurs premiers

a) $3^4\times5\times7$ **b)** $3^3\times7^2$

c) $7\times11\times13$ **d)** $2^5\times3\times5^2\times19$

50 Théorème de Pythagore

Le triangle DEF est rectangle en E donc d'après le théorème de Pythagore,

$DE^2=DF^2-EF^2=24^2-15^2=351$

Donc $DE=\sqrt{351}=3\sqrt{39}$.

Fractions

51 $A=-\frac{19}{14}$ $B=\frac{2}{7}$

$C=\frac{109}{130}$ $D=-\frac{17}{32}$

52 $E=\frac{7}{30}$ $F=-\frac{15}{26}$ $G=-\frac{7}{3}$ $H=3$

53 $M=2$ $N=\frac{5}{24}$ $P=3$

54 $R=-\frac{1}{3}$ $S=\frac{11}{6}$

$T=\frac{5}{3}$ $U=-\frac{7}{15}$

55 $A=0$ $B=1$ $C=1{,}2$ $D=2$

56 $1-\frac{1}{3}-3\times\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$

57 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$.

Tigane a mangé $\frac{5}{12}$ des cookies, il en reste $\frac{7}{12}$.

Questions de cours

58 **1.** En additionnant les exposants.

2. En soustrayant les exposants : 3^{5-2}

3. La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif dont le carré est a.

59 **1.** $1,4,9,16,25,36,49,64,81$ et 100 .

2. $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$

60 Soit n un nombre entier.

n est **pair** si et seulement s'il existe un entier k tel que $n=2k$ **.**

n est **impair** si et seulement s'il existe un entier k tel que $n=2k+1$ **.**

Un nombre premier est un nombre entier qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

61 **1.** Vrai car $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$

2. Vrai car $\mathbb{D}\subset\mathbb{R}$

3. Vrai car $\mathbb{N}\subset\mathbb{D}$

4. Faux. Contre-exemple : π

5. Faux.Contre-exemple : $\frac{1}{3}$

Puissances

62 $A=2^3\times3\times7^2$ $B=2^2\times3^2\times7^3$

$C=2^7\times3^2\times7$ $D=2\times3\times7$

$E=2\times3^{-1}\times7^{-1}$ $F=7^{-2}\times2^{-5}\times3^{-3}$

63 **a)** $17^{-5}=\frac{1}{17^5}$ **b)** $6^{-6}=\frac{1}{6^6}$

c) $8^{-7}=\frac{1}{8^7}$ **d)** $\frac{1}{9^{23}}=9^{-23}$

64 2^{-3} $(-5)^2$ $(-4)^{-4}$ $(-1{,}2)^6$

65 **a)** 5^6 **b)** 6^{-3} **c)** 15^4

d) $10{,}5^{-7}$ **e)** -4^{-6} **f)** 8^3

66 **a)** 3^{12} **b)** 2^5 **c)** 4^4

d) $(-1{,}5)^4$ **e)** $(-3{,}6)^{-3}$ **f)** $3{,}2^{-3}$

67 **a)** $2{,}8^{-2}$ **b)** 5^2 **c)** $(-3{,}7)^{-10}$ **d)** $3{,}5^{-3}$

e) $5{,}6^8$ **f)** $10^0=1$ **g)** $(-1{,}4)^{-5}$ **h)** $21{,}2^{-6}$

68 **a)** 8^{-4} **b)** $(-10)^3$ **c)** 6^{-12} **d)** $7{,}5^{16}$

69 $I = y^5$ $J = x^{16}$ $K = (xy)^{14}$
$L = -x^3y^4$ $M =$ impossible à simplifier
$N = y$ $O = x^{-7}$ $P = x^{-3}y^4$ $Q = 0$

70 $I = a^3b^4$ $J = a^{24}$ $K = (ab)^{11}$
$L = -a^2b^5$ $M =$ impossible à simplifier
$N = a^{210}$ $O = b^4$ $P = (ab)^3$

71 Selon les temps de pause de la phrase d'Iness, on peut interpréter la phrase comme $(3+3)^4$ ou comme $3+3^4$.

De même pour la phrase de Samuel $\frac{9}{3}+3$ ou $\frac{9+3}{3}$.

72 **a)** $5,8\times10^{14}$
b) $4,523\ 556\ 001\ 5\times10^{10}$
c) $4,56\times10^{-10}$
d) $1,32\times10^{-6}$
e) $5,64651\times10^{3}$
f) $2,35\times10^{1}$

73 **1.** $1,51\times10^{18}$ km
2. $400\text{ nm} = 4\times10^{-7}\text{m}$
$200\text{ nm} = 2\times10^{-7}\text{m}$
$1000\text{ nm} = 10^{-6}\text{m}$
$5\mu\text{m} = 5\times10^{-6}\text{m}$
$50\mu\text{m} = 5\times10^{-5}\ \text{m}$ =

74 $A = 75 = 7,5\times10^{1}$
$B = 2\ 350\ 286,7 = 2,350\ 286\ 7\times10^{6}$

Définition de la racine carrée

75 **a)** Vrai car $8^2 = 64$
b) Faux c'est $\sqrt{49} = 7$.
c) Faux $(-3)^2 = 9$
d) Faux car une racine n'est définie que pour un nombre positif.
e) Vrai car $5^2 = (-5)^2 = 25$

76 **a)** 16 = 4^2. Or 4 est positif donc $\sqrt{16} = 4$.
b) 4 = 2^2. Or 2 est positif donc $\sqrt{4}$ = 2.
c) 0,09 = $0,3^2$. Or 0,3 est positif donc $\sqrt{0,09}$ = 0,3
d) 0,36 = $0,6^2$. Or 0,6 est positif donc $\sqrt{0,36}$ = 0,6.
e) 144 = 12^2. Or 12 est positif donc $\sqrt{144}$ = 12.

77 **a)** 10 **b)** 4 **c)** Impossible
d) 7 **e)** 13 **f)** Impossible

78 **a)** 9 **b)** 12 **c)** 0,2
d) 40 **e)** 7 **f)** 64

79 $J = 64$ $K = 60$ $L = 20$ $M = -42$

80 $N = 12$ $O = 32$ $P = 45$ $Q = 325$

Propriétés de la racine carrée

81 **a)** $3^2\times2$ **b)** $2^2\times3$ **c)** $2^2\times6$
d) $2^2\times7$ **e)** $3^2\times5$ **f)** $6^2\times2$
g) $5^2\times6$ **h)** $12^2\times2$

82 **a)** $2\sqrt{2}$ **b)** $3\sqrt{2}$ **c)** $5\sqrt{2}$
d) $8\sqrt{2}$ **e)** $9\sqrt{2}$ **f)** $10\sqrt{2}$

83 **a)** $2\sqrt{5}$ **b)** $4\sqrt{5}$ **c)** $5\sqrt{5}$
d) $7\sqrt{5}$ **e)** $8\sqrt{5}$ **f)** $10\sqrt{5}$

84 **a)** $4\sqrt{2}$ **b)** $5\sqrt{3}$ **c)** $3\sqrt{11}$
d) $3\sqrt{6}$ **e)** $4\sqrt{3}$ **f)** $3\sqrt{3}$

85 $A = \sqrt{2}$
$B = -2\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$
$C = -2\sqrt{7} - 7\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

86 **1. a)** $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
$\sqrt{300} = 10\sqrt{3}$.
b) $11\sqrt{3}$
2. $E = 3\sqrt{2}$ $F = -20\sqrt{5}$

87 $A=9\sqrt{2}$ $B=-3\sqrt{3}$ $C=31\sqrt{5}$

88 $G=3+42\sqrt{3}$ $H=-9+16\sqrt{7}$

89 $J=27\sqrt{6}$ $K=27\sqrt{15}$
$L=-20\sqrt{10}$ $M=-132\sqrt{3}$

90 **a)** 49 **b)** $25\sqrt{5}$ **c)** 27 **d)** $78\sqrt{78}$

91 **a)** $\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{7}{5}$ **d)** $\frac{1}{4}$

92 **a)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **b)** $\frac{7\sqrt{5}}{10}$ **c)** $\frac{\sqrt{6}}{8}$ **d)** $\frac{3\sqrt{6}}{4}$

93 $A=18+6\sqrt{7}$ $B=-6\sqrt{5}-90$
$C=-9-71\sqrt{3}$ $D=-120-16\sqrt{15}$

94 **1.** $AC=4\sqrt{7}$ cm **2.** $12\sqrt{7}\approx 13{,}7$ cm

95 **1.** $18\sqrt{2}$ cm **2.** 40 cm²

Multiples, diviseurs, parité

96 55; 66; 77; 88; 99; 110; 121; 132; 143; 154; 165; 176; 187; 198; 209; 220; 231; 242; 253; 264; 275; 286; 297.

97 Multiples de 4 :
$36=4\times 9$, $52=4\times 13$ et $100=4\times 25$
Multiples de 9 :
36 et 225 car la somme de leurs chiffres est divisible par 9.
Multiples de 25 :
$100=4\times 25$, $150=6\times 25$, $225=9\times 25$ et $325=13\times 25$.

98 **1.** 5 679 **2.** 2 196

99 **1.** 54 **2.** 63

100 705; 735; 765; 95; 720; 750 et 780.

101 **a)** Vrai.
b) Faux. Contre-exemple : 18.
c) Faux. Contre-exemple : 6.
d) Faux. Contre-exemple : 18.
e) Faux. Contre-exemple : 90.

102 **1.** On obtient **2**.
2. Ce programme donne le reste de la division euclidienne de **b** par **a**.

103 **1.** La division euclidienne de a par b.
2. Si le reste est nul, a est un multiple de b.
3.

```
d= reste(a,b)
Si d=0 alors a est un multiple de b
Sinon a n'est pas un multiple de b.
```

104 **a)** 1; 2; 4; 8; 16; 32.
b) 1; 67.
c) 1; 3; 9; 27; 81.
d) 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24; 36; 48; 72; 144.

105 **a)** diviseurs de 25 :
1; 5 et 25
Diviseurs de 65 :
1; 5; 13 et 65.
Diviseurs communs : 1 et 5
b) Diviseurs de 80 :
1; 2; 4; 5; 8; 10; 16; 20; 40 et 80
Diviseurs de 120 :
1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 15; 20; 24; 30; 40; 60 et 120.
Diviseurs communs :
1; 2; 4; 5; 8; 10; 20 et 40.
c) Diviseurs de 81 : 1; 3; 9; 27 et 81.
Diviseurs de 49 : 1; 7 et 49.
Diviseurs communs : 1
d) Diviseurs de 39 : 1, 3, 13 et 39.
Diviseurs de 51 : 1, 3, 17 et 51.
Diviseurs communs : 1 et 3.

106 **a)** pgcd(48,56)=8 donc $\frac{48}{56}=\frac{6}{7}$
b) pgcd(56,63)=7 donc $\frac{56}{63}=\frac{8}{9}$
c) pgcd(63,48)=3 donc $\frac{63}{48}=\frac{21}{16}$
d) pgcd(650,900)=50 donc $\frac{650}{900}=\frac{13}{18}$
e) pgcd(1155,1164)=3 donc $\frac{1155}{1164}=\frac{385}{388}$

107 Réponse **a)**.

108 Elle en a 421.

Multiples, diviseurs et écriture littérale

109 Soit n un multiple de 9, alors il existe un entier k tel que $n=9k=3\times(3k)$.

$3k$ est un entier donc n est un multiple de 3.

110 Soit n un multiple de 2, alors il existe un entier k tel que $n=2k$ .Soit m un multiple de 13, alors il existe un entier k' tel que $m=13k'$

$mn=2\times k\times 13\times k'=26\times kk'$.

Or, kk' est un entier donc mn est un multiple de 26.

111 Soit m et n deux multiples de 5, alors il existe deux entiers k et k' tel que $n=5k$ et $m=5k'$.

$m+n=5k+5k'=5(k+k')$. Or $k+k'$ est un entier donc $m+n$ est un multiple de 5.

112 Rédiger une solution

1. $35=7\times 5$ et $6\,300=7\times 900$ donc 35 et 6300 sont divisibles par 7.

2.

$$6\,335=35+6\,300=7\times 5+7\times 900$$
$$=7\times(5+900)=7\times 905$$

donc 6 335 est divisible par 7.

3. Soit x et y deux nombres divisibles par 7, alors il existe deux entiers k et k' tel que $x=7k$ et $y=7k'$.

$x+y=7k+7k'=7(k+k')$ Or $k+k'$ est un entier donc $x+y$ est divisible par 7.

4. 6 349 147

$$=6\,300\,000+49\,000+140+7$$
$$=7\times 900\,000+7\times 7\,000+7\times 20+7\times 1$$
$$=7\times(900\,000+7\,000+20+1)$$
$=7\times 907\,021$ donc 6 349 147 est un multiple de 7.

113 **a)** Si a et b sont pairs, alors il existe k et k' tels que $a=2k$ et $b=2k'$.

Donc $a+b=2k+2k'=2(k+k')$

Or $k+k'$ est un entier donc $a+b$ est pair.

b) Si a et b sont impairs, alors il existe k et k' tels que $a=2k+1$ et $b=2k'+1$

Donc

$a+b=2k+1+2k'+1=2k+2k'+2=2(k+k'+1)$

Or $k+k'+1$ est un entier donc $a+b$ est pair.

c) Si a est pair et b est impair, alors il existe k et k' tels que $a=2k$ et $b=2k'+1$

Donc $a+b=2k+2k'+1=2(k+k')+1$.

Or $k+k'$ est un entier donc $a+b$ est impair.

114 n s'écrit sous la forme $2k+1$.

$$(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2k'+1$$

avec $k'=2k^2+2k$ donc n^2 est impair.

115 Si a et b sont impairs, alors il existe k et k' tels que $a=2k+1$ et $b=2k'+1$

Donc $a^2+b^2=(2k+1)^2+(2k'+1)^2$

$$=(2k+1)(2k+1)+(2k'+1)(2k'+1)$$
$$=4k^2+2k+2k+1+4k'^2+2k'+2k'+1$$
$$=4k^2+4k+4k'^2+4k'+4$$
$$=2(2k^2+2k+2k'^2+2k'+2)$$

Or $2k^2+2k+2k'^2+2k'+2$ est un entier donc a^2+b^2 est pair.

116 n s'écrit sous la forme $2k+1$.

$$(2k+1)^3=(2k+1)(2k+1)^2$$
$$=(2k+1)(4k^2+4k+1)$$
$$=8k^3+8k^2+2k+4k^2+4k+1$$
$$=8k^3+12k^2+6k+1=2(4k^3+6k^2+3k)+1$$

Or $4k^3+6k^2+3k$ est un entier donc n^3 est impair.

117 **1.** n s'écrit sous la forme $2k+1$.

$$n^2-1=(2k+1)^2-1=4k^2+4k+1-1=4k^2+4k=4k(k+1)$$

Or k et $k+1$ sont deux nombres entiers consécutifs, donc l'un des deux est pair, c'est-à-dire multiple de 2 et $4k$ est un multiple de 4. Le produit $4k(k+1)$ est donc multiple de 8.

2. $2^n+2^{n+1}=2^n(1+2)=2^n\times 3$, donc 2^n+2^{n+1} est divisible par 3.

Nombres premiers

118 **1.** Liste des nombres premiers inférieurs à $\sqrt{821}\approx 28,6$:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19 et 23.

2. 821 est un nombre premier car il n'est divisible par aucun des nombres précédents.

119 377 n'est pas premier car il est divisible par 13.

120 **1.** Les nombres premiers sont 157 et 311.

2. a) $\frac{231}{468}=\frac{77}{156}$ **b)** $\frac{622}{314}=\frac{311}{157}$

c) irréductible **d)** $\frac{204}{231}=\frac{68}{77}$

121 **a)** 558 **b)** 169; 558 et 615.

122 Soit p un nombre premier, son carré est $p^2=p\times p$ donc p est un diviseur de p^2 autre que 1 et lui-même donc p^2 n'est pas premier.

123 **1.** $A=3^3\times5^2\times7$

$B=2^4\times3^2\times11$

$C=2\times7^3\times11$

2. $\frac{A}{B}=\frac{525}{176}$ $\frac{B}{C}=\frac{72}{343}$ $\frac{C}{A}=\frac{1078}{675}$

3. $\sqrt{A}=15\sqrt{21}$ $\sqrt{B}=12\sqrt{11}$ $\sqrt{C}=7\sqrt{154}$

124 Histoire des maths

1. 3; 7; 31; 127 et 2 047.

2. Ils sont tous premiers.

3. Non, contre-exemple : $2^{20}-1=1048575$ n'est pas premier car divisible par 5.

Nature d'un nombre

125 **a)** $6{,}8\in\mathbb{Q}$ **b)** $\frac{3}{5}\notin\mathbb{Z}$

c) $\mathbb{Z}\not\subset\mathbb{N}$ **d)** $\sqrt{49}\in\mathbb{D}$

e) $\mathbb{R}\not\subset\mathbb{D}$ **f)** $-\frac{4}{56}\in\mathbb{Q}$

126 **a)** $\mathbb{N}$ **b)** $\mathbb{D}$ **c)** $\mathbb{N}$ **d)** $\mathbb{N}$ **e)** $\mathbb{Q}$

127 **a)** $-\frac{5}{10^0}$ **b)** $\frac{35}{10^1}$

c) $\frac{34}{10^2}$ **d)** $\frac{7\,584\,000}{10^0}$

Tous ces nombres s'écrivent sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$ donc ce sont des décimaux.

128 **a)** Oui.
b) Oui.
c) Oui.
d) Non.
e) Oui.

129 **a)** Si $\frac{1}{3}$ est décimal alors il existe des entiers a et n tels que $\frac{1}{3}=\frac{a}{10^n}$.

On a alors $3a=10^n$.

b) L'unique décomposition en produit de facteurs de 10^n ne contient que des 2 et des 5 donc ne peut pas être un multiple de 3.

c) On obtient donc une contradiction donc $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

130 Si $\frac{2}{3}$ est décimal alors il existe des entiers a et n tels que $\frac{2}{3}=\frac{a}{10^n}$.

On a alors $3a=2\times10^n$.

L'unique décomposition en produit de facteurs de 2×10^n ne contient que des 2 et des 5 donc ne peut pas être un multiple de 3.

On obtient donc une contradiction donc $\frac{2}{3}$ n'est pas décimal.

131 **a)** Non. Si $\frac{7}{11}$ est décimal alors il existe des entiers a et n tels que $\frac{7}{11}=\frac{a}{10^n}$.

On a alors $11a=7\times10^n$. L'unique décomposition en produit de facteurs de 7×10^n ne contient que des 7, des 2 et des 5.

On obtient donc une contradiction donc $\frac{7}{11}$ n'est pas décimal.

b) Oui. $\frac{77}{32}=\frac{240625}{10^5}$

c) Non. Même méthode qu'en **a)**.
d)Non. Même méthode qu'en **a)**.

132 $A = 6 \in \mathbb{N}$

133 $A - B = 3 \in \mathbb{N}$.

134 **a)** Vrai.
b) Vrai.
c) Faux. Contre-exemple : $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \notin \mathbb{N}$
d) Faux. Contre-exemple : $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

135 **Esprit critique**

1. Supposons que $5\sqrt{2}$ est rationnel alors il existe des entiers p et q tels que $5\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

On a alors $\sqrt{2} = \frac{p}{5q}$. Donc on aboutit à une absurdité car on sait que $\sqrt{2}$ est irrationnel et donc il ne peut pas s'écrire sous la forme d'un quotient. On en déduit que notre supposition est fausse, donc $5\sqrt{2}$ est irrationnel.

2. Supposons que $\pi + \frac{8}{7}$ est rationnel alors il existe des entiers p et q tels que $\pi + \frac{8}{7} = \frac{p}{q}$

On a alors $\pi = \frac{p}{q} - \frac{8}{7} = \frac{7p - 8q}{7q}$. Donc on aboutit à une absurdité car on sait que π est irrationnel et donc il ne peut pas s'écrire sous la forme d'un quotient.
On en déduit que notre supposition est fausse, donc $\pi + \frac{8}{7}$ est irrationnel.

136 **1.** Oui car $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
2. Non. Contrexemple : $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.

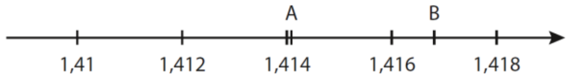
Encadrement

137 **a)** $0{,}8 < \frac{11}{13} < 0{,}9$

b) $0{,}84 < \frac{11}{13} < 0{,}85$

c) $0{,}846 < \frac{11}{13} < 0{,}847$

138 **1.**



2. $0{,}002 < \frac{17}{12} - \sqrt{2} < 0{,}003$

139 **a)** $0 < 5^{-2} < 0{,}1$
b) $0 < 3 \times 8^{-3} < 0{,}1$
c) $0 < 5{,}6 \times 10^{-3} < 0{,}1$

140 **a)** $6 < \sqrt{37} < 7$ **b)** $8 < \sqrt{78} < 9$
c) $10 < \sqrt{105} < 11$ **d)** $3 < \sqrt{13} < 4$

141 **a)** $5 < \frac{17}{3} < 6$ **b)** $12 < \frac{85}{7} < 13$
c) $3 < \frac{45}{13} < 4$ **d)** $7 < \frac{854}{117} < 8$
e) $-4 < -\frac{59}{16} < -3$

À chacun son rythme

142

L'énoncé A est seulement calculatoire, l'énoncé B nécessite une écriture littérale et l'énoncé C est une démonstration non guidée.

Énoncé A

1. **a)** $A^2 = 450 \quad B^2 = 360$
b) $A^2 = 2 \times 3^2 \times 5^2$
$B^2 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
Donc $\frac{A}{B} = \sqrt{\frac{5}{4}}$.
2. $15\sqrt{2}$

Énoncé B

1. $-21\sqrt{6} + 30\sqrt{2}$
2. Soit k et k' des entiers.
Le produit d'un multiple de A^2 et d'un multiple de C^2 est :
$450 \times k \times 294 \times k'$
$= 2 \times 3^2 \times 5^2 \times k \times 2 \times 3 \times 7^2 \times k'$
$= 6 \times 75k \times 6 \times 49k'$
$= 36 \times (75 \times 49kk')$
C'est bien un multiple de 36 car $75 \times 49kk' \in \mathbb{N}$.

Énoncé C

Supposons que $\sqrt{450}+\frac{5}{7}$ est rationnel alors il existe des entiers p et q tels que

$$\sqrt{450}+\frac{5}{7}=\frac{p}{q}$$

On a alors $15\sqrt{2}=\frac{p}{q}-\frac{5}{7}=\frac{7p-5q}{7q}$.

D'où $\sqrt{2}=\frac{7p-5q}{105q}$

Donc on aboutit à une absurdité car on sait que $\sqrt{2}$ est irrationnel et donc il ne peut pas s'écrire sous la forme d'un quotient.
On en déduit que notre supposition est fausse, donc $\sqrt{450}+\frac{5}{7}$ est irrationnel.

Exercices de synthèse

p. 62

143 Puissances

1. $A=\frac{2\times7\times5\times7\times10^{5-3}}{3\times7\times10^{3}}=\frac{70}{3\times10}=\frac{7}{3}$

2. $B=\frac{5\times7\times3\times10^{-3+5}}{7\times3\times10^{-1}}=5\times10^{2-(-1)}=5\times10^{3}$.

3.

$$C=\frac{5\times4\times3\times10^{6-3}}{3\times5\times4\times2\times10^{-5+2}}=\frac{1}{2}\times10^{3-(-3)}$$
$$=0{,}5\times10^{6}=5\times10^{5}$$

4.

$$D=\frac{3\times1{,}2\times10^{-12+2}}{0{,}2\times10^{-7}}$$
$$=18\times10^{-10-(-7)}$$
$$=18\times10^{-3}$$
$$=0{,}018=1{,}8\times10^{-2}$$

144 Racines

$A=6+2\sqrt{5}$

$B=-10\sqrt{7}+140$

$C=18+42\sqrt{2}-6\sqrt{2}-28=-10+36\sqrt{2}$

$D=-36\sqrt{11}+27\times11+48-36\sqrt{11}=345-72\sqrt{11}$

145 Dans un quadrilatère

a) $p=2\left(11-3\sqrt{5}\right)+2\times\left(11+3\sqrt{5}\right)=44$ cm

b) $\mathcal{A}=\left(11-3\sqrt{5}\right)\left(11+3\sqrt{5}\right)$
$=121-45=76\,\text{cm}^2$

c) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle LOG rectangle en L :

$$d=\sqrt{\left(11-3\sqrt{5}\right)^2+\left(11+3\sqrt{5}\right)^2}$$
$$=\sqrt{242+90}=\sqrt{332}=2\sqrt{83}$$

146 Diviseurs

1. Les diviseurs de 28 sont :
1; 2; 4; 7; 14 et 28.
$1+2+4+7+14=28$ donc 28 est un nombre parfait. Les diviseurs de 496 sont:
1,2,4,8,16,31,62,124,248 et 496.
$1+2+4+8+16+31+62+124+248=496$
donc 496 est un nombre parfait.

2. Les diviseurs de 130 sont :
1,2,5,10,13,26,65 et 130.
$1+2+5+10+13+26=57\neq65$ donc 130 n'est pas un nombre parfait.

147 Ensemble de nombres

1. $M=\frac{35}{16}-\frac{3}{8}=\frac{70-3}{16}=\frac{67}{16}$

2. $\frac{67}{16}=4{,}1875=\frac{41875}{10^4}$ donc M est un nombre décimal et est aussi un nombre rationnel.

148 Nombres impairs

1. Par exemple 15 et 17 :
$15+17=32=4\times8$.

2. Pour passer d'un nombre impair au suivant, il faut ajouter 2.

3. $2n+1$ et $2n+3$ avec n entier naturel.

4. $2n+1+2n+3=4n+4=4(n+1)=4m$
où $m=n+1$ est un entier naturel.
Donc la somme de deux entiers naturels impairs consécutifs est un multiple de 4.

149 Fractions

1. $A = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \times \frac{21}{20} = \frac{8}{3} - \frac{7}{4} = \frac{32-21}{12} = \frac{11}{12}$

$B = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{12}{15} - \frac{10}{15}} = \frac{8}{3} \times \frac{15}{2} = 20$

2. $A \in \mathbb{Q}$ et $B \in \mathbb{N}$

150 Notation scientifique

1. $5\,000 = 5 \times 10^3$

2. $5 \times 10^3 \times 24 = 120 \times 10^3$

3. $120 \times 10^3 \times 365 \times 80 = 3,504 \times 10^9$

151 Encadrement

1. $1 < \frac{34}{19} < 2$

2. $\frac{35}{19} - \frac{33}{19} = \frac{2}{19}$

3.

$$\begin{array}{l|l} 34 & 19 \\ \hline 150 & 1,78 \\ \quad 170 & \\ \qquad 18 & \end{array}$$

Donc $1,78 < \frac{34}{19} < 1,79$

4. $1,789\,47 < \frac{34}{19} < 1,789\,48$

Exercices d'approfondissement

p. 63

152 Quantité conjuguée

$A = \frac{5}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{5\sqrt{3}-5}{2}$

$B = \frac{-2}{3-\sqrt{5}} \times \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{-6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

$C = \frac{4-\sqrt{7}}{\sqrt{7}+5} \times \frac{\sqrt{7}-5}{\sqrt{7}-5} = \frac{9\sqrt{7}-27}{-18} = \frac{\sqrt{7}-3}{-2}$

153 Des molécules d'eau

1.

$2 \times 1u + 16u = 18u$

$= 18 \times 1,660\,54 \times 10^{-27}$ kg

$= 2,988\,972 \times 10^{-26}$

2.

$\frac{1}{2,988\,972 \times 10^{-26}}$

$= 0,334\,563\,187\,6 \times 10^{26}$

$\approx 3,35 \times 10^{25}$ molécules d'eau

3. $1,37 \times 10^9 \times 10^{12} \times 3,35 \times 10^{25}$

$\approx 4,6 \times 10^{46}$ molécules d'eau

4. Par seconde :

$250 \times 10^3 \times 3,35 \times 10^{25}$

$= 8,375 \times 10^{30}$ molécules d'eau

Par an :

$2,64 \times 10^{38}$ molécules d'eau

154 Première puissance supérieure à un nombre donné

1.

```
a=int(input("a=?"))
p=1
print(p)#première puissance de a : a^0
for i in range(1,10):
    p=p*a
    print(p)
```

2.

```
a=int(input("a=?"))
b=int(input("b=?"))
p=1
while p<b :
    p=p*a
print(p/a)
```

3.

```
a=int(input("a=?"))
b=int(input("b=?"))
p=1
while p<b :
    p=p*a
print(p)
```

4.

```
a=int(input("a=?"))
b=int(input("b=?"))
sup=int(input"Pour la 1re puissance d'un nombre positif a supérieur à b, taper 1,
pour la 1re puissance d'un nombre négatif, taper 2")
p=1
while p<b :
    p=p*a
if sup==1:
    print(p)
else :
print(p/a)
```

155 Écritures exactes et simplifiées

Attention : le titre de l'exercice sera remplacé par celui ci-dessus.

1. $166-66\sqrt{5}>0 \Leftrightarrow \frac{166}{6}>\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{83}{33}>\sqrt{5}>0$

$\Leftrightarrow 83^2>5\times33^2$ ce qui est vrai car

$83^2>6400>5\times1089$ donc N existe.

2.a) $\mathrm{M}^2=166+66\sqrt{5}$ et $\mathrm{N}^2=166-66\sqrt{5}$

$\mathrm{M}\times\mathrm{N}=\sqrt{166^2-66^2\times5}$

b)

$$(\mathrm{M}+\mathrm{N})^2=\mathrm{M}^2+2\mathrm{MN}+\mathrm{N}^2$$
$$=332+2\sqrt{166^2-66^2\times5}>0$$

Donc $\mathrm{M+N}=\sqrt{332+2\sqrt{166^2-66^2\times5}}$

3. a) $\left(11+3\sqrt{5}\right)^2=121+66\sqrt{5}+45$

$$=166+66\sqrt{5}$$

donc $\mathrm{M}=11+3\sqrt{5}$

b) $\left(11-3\sqrt{5}\right)^2=121-66\sqrt{5}+45=166-66\sqrt{5}$

donc $\mathrm{N}=11-3\sqrt{5}$

c) $\mathrm{M}+\mathrm{N}=22$

156 Escaliers et division euclidienne

1. Soit N le nombre de marches. N est un multiple de 3 compris entre 130 et 150 donc 132; 135; 138; 141; 144 ou 147.
$N=4k+1$ donc on cherche si $N-1$ est divisible par 4. $N=141$ Il y a 141 marches

157 Analyser un problème pour le résoudre

On cherche le plus petit multiple commun de $30=5\times6$ et $36=6\times6$, c'est $180=6\times30=5\times36$.
180 minutes = 3h donc il sera 15h.
Une voiture aura fait 5 tours et l'autre 6 tours.

158 Facteurs premiers et parité

1. Il n'y a que des 3.

2. 3^n est donc impair et 3^n+1 est donc pair.

159 Divisibilité

d divise n donc il existe k tel que $n=kd$.
d' divise d donc il existe k' tel que $d=k'd'$.
Donc $n=kk'd'$ donc d' divise n.

160 Une propriété du cours

1. Il existe au moins un diviseur de n autre que 1 et n (sinon n serait premier).

2. Supposons que d n'est pas premier, et notons d' un diviseur de d $(d'<d)$.
Alors d' divise aussi n.
C'est une contradiction car on aurait trouvé un diviseur de n plus petit que d.
Conclusion : notre supposition est fausse donc le plus petit diviseur d est premier.

3. d divise n donc il existe un entier k tel que $n=kd$ et $1<d<n$.
k est aussi un diviseur de n plus grand que d car d est le plus petit diviseur : $k>d$ donc $kd>d^2$, c'est-à-dire $n>d^2$, d'où $\sqrt{n}>d$.

161 Développement décimal périodique

1. $\frac{253}{7}\approx36{,}142\,857\,14\ldots$ On remarque donc un cycle répétitif 1-4-2-8-5-7 de longueur 6.
$314=6\times52+2$ donc la 314^e décimale sera un 4.

2. a)

$$10\,000x=10\,000\times0{,}10001000\ldots$$
$$=1000{,}1000\ldots$$
$$=1000+x$$

Résolvons $10\,000x=1000+x$

$9999x=1000$ donc $x=\frac{1\,000}{9\,999}$

b) 1000,1000 1000 est le développement décimal de $1000+\dfrac{1000}{9999}$

162 Nombre d'or

$$0{,}01998<\phi-C<0{,}01999$$

163 Développement décimal illimité

1. $10x-9=9{,}999\,99\ldots-9=0{,}999\,99\ldots$

2. $x=1$

3. On a $0{,}999\,99\ldots.=1$

164 Encadrement

1. a) 1,415 **b)** 1,570

2. a) Impossible.

b) 1,42 et 1,51

c) $\dfrac{142}{100}=\dfrac{71}{50}$ et $\dfrac{151}{100}$

165 Nature du nombre d'or

1. $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2=\dfrac{p}{q}+1$ donc $\dfrac{p^2}{q^2}=\dfrac{p+q}{q}$

d'où $p^2=\dfrac{(p+q)q^2}{q}=pq+q^2$

2.a) Si p et q sont impairs, p^2 et q^2 sont impairs et pq est impair, on a donc une absurdité car la somme de deux nombres impairs est paire.

b) Si p est pair et q impair, alors p^2 est pair, q^2 est impair et pq est pair. On a à nouveau une absurdité car la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est impair.

c) Si p est impair, alors p^2 est impair.

Si q est pair, alors q^2 est pair. On a alors pq pair. On aboutit à une absurdité car la somme de deux nombres pairs est paire.

d) Il est impossible que p et q soient pairs tous les deux car la fraction $\dfrac{p}{q}$ est irréductible.

Conclusion : notre supposition de départ est fausse, φ ne peut pas s'écrire sous forme rationnel, donc φ est irrationnel.

166 Histoire des maths

1. 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29

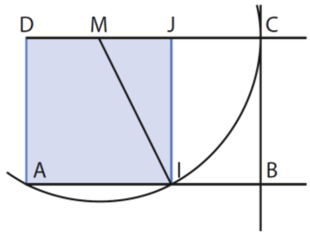
2. Par exemple : 5+17 = 22 ou 17+29 = 46.
Ce sont des nombres pairs.

3. $34=11+23$; $68=61+7$ et $100=89+11$

Vers la 1re

167 Vers STD2A

1.



D'après le théorème de Pythagore dans le triangle IJM rectangle en J, on a :

$\mathrm{MI}=\sqrt{10^2+5^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$ et

$\mathrm{DC}=\mathrm{DM}+\mathrm{MC}=5+5\sqrt{5}$

2.

$$\frac{L}{\ell}=\frac{5+5\sqrt{5}}{10}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$$

3.

$$\frac{\mathrm{IJ}}{\mathrm{JC}}=\frac{10}{\mathrm{DC}-\mathrm{DJ}}=\frac{10}{5+5\sqrt{5}-10}$$

$$=\frac{10}{5\sqrt{5}-5}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}\times\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}+2}{4}=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}=\varphi$$

Donc c'est bien un rectangle d'or.

168 Vers la Spécialité Maths

$$\mathrm{E}=\frac{5}{4\sqrt{2}}+\frac{3}{-2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{5}{4\sqrt{2}}-\frac{6}{4\sqrt{2}}=\frac{5-6}{4\sqrt{2}}$$

$$=\frac{-1}{4\sqrt{2}}=\frac{-1\times\sqrt{2}}{4\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{8}$$

Penser à simplifier $\sqrt{18}$ avant de se lancer dans la quantité conjuguée.

169 Vers STI2D

1. Le pouvoir calorifique du charbon est de :

- en kWh : 7 777,78 environ.
- en tep : 0,67 environ.

2. 11 611,11 kWh environ.

3. 600 000 milliards de kWh.

Préparer le contrôle
Je me teste
p. 66

Objectif 1 Calculer avec des puissances

170 B et C

171 D

172 B et C

173 B

Objectif 2 Calculer avec des racines

174 A et B

175 B et C

176 B

177 B et C

178 B et D

Objectif 3 Utiliser les notions de multiples, de diviseurs et de nombres premiers

179 C **180** A et B

181 C **182** B et D

Objectif 4 Déterminer la nature d'un nombre

183 C **184** A

185 C et D **186** A

187 D

Préparer le contrôle
Je m'entraîne
p. 67

Objectif 1 Calculer avec des puissances

188 **a)** 3^{-3} **b)** $7{,}1^{-2}$ **c)** $(-7)^{30}$ **d)** 2^{9}

e) 1 **f)** 10 **g)** 29^{-6} **h)** 36^{7}

189 $A=24\times 10^{-1}=2{,}4=\dfrac{12}{5}$

190 1 400000 atomes d'hydrogène.

Objectif 2 Calculer avec des racines

191 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

192 1. $A=8\sqrt{5}$ $B=4\sqrt{5}$

2.

$$\begin{aligned}A\times B&=8\sqrt{5}\times 4\sqrt{5}\\&=8\times 4\times \sqrt{5}^{2}\\&=32\times 5=160\end{aligned}$$

Donc $A\times B$ est un entier.

193 1. $3\sqrt{7}$ cm

2. $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$ cm

3. $\dfrac{7\sqrt{3}}{4}$ cm²

Objectif 3 Utiliser les notions de multiples, de diviseurs et de nombres premiers

194 1. 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17 et 19.

2. 463 n'est divisible par aucun des nombres premiers suivants :
2; 3; 5; 7; 11; 13; 17 et 19.
Donc 463 est premier.

195 Deux entiers sont consécutifs donc s'écrivent $2p$ et $2p+1$.

$2p\times(2p+1)=4p^2+2p=2(2p^2+p)$ et donc leur produit est pair.

196 1. k divise a et b donc il existe deux entiers n et m tels que $a=kn$ et $b=km$.
$a-b=k(n-m)$ et $n-m$ est un entier relatif donc k divise $a-b$.

2.a) Il pourra réaliser au maximum 277 paquets de bonbons car 27 est le plus grand diviseur commun à 108 et 135.
b) Il y aura 4 bonbons rouges et 5 bonbons noirs dans chaque paquet.

Objectif 4 Déterminer la nature d'un nombre

197 $-0{,}054 < \dfrac{\sqrt{3}-2}{5} < -0{,}053$

198 $\dfrac{65}{91} = \dfrac{5}{7}$ n'est pas un décimal (voir le corrigé de l'exercice **13**).

199 Supposons que $\dfrac{\pi}{2}$ est rationnel alors il existe des entiers p et q tels que $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{p}{q}$.

On a alors $\pi = \dfrac{2p}{q}$. Donc on aboutit à une absurdité car on sait que π est irrationnel et donc il ne peut pas s'écrire sous la forme d'un quotient. On en déduit que notre supposition est fausse, donc $\dfrac{\pi}{2}$ est irrationnel.

Travaux pratiques p. 68-69

1 Approximation de $\sqrt{2}$

- **Durée estimée :** 50 min
- **Objectif :** Déterminer une approximation de $\sqrt{2}$ avec trois outils différents et deux méthodes différentes :
- la calculatrice avec la méthode de la dichotomie,
- le tableur qui permet d'aller plus loin dans l'approximation,
- un algorithme programmant la méthode de Héron.

A. Avec une calculatrice

1. $1 < 2 < 4$ donc $1 < \sqrt{2} < 2$.
2. $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$
3. $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$

B. Avec un tableur

1. Voir la feuille de calcul.
2. B1 = (L2-B2)/10
C2=B2+$B$1
3. B3=B2*B2
4. $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$
5. $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.
il s'agit d'un encadrement au centième.
6. $1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$

C. Avec un programme

1. $E1 = n = 2$,

$$E2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

$$E3 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{17}{12}$$

$$E4 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}\right) = \frac{577}{408} \approx 1{,}4142$$

2. a)

```
n=float(input("n=?"))
E=n
print(n)
for i in range(2,11):
    E=0,5*(E+n/E)
    print (E)
```

b) On obtient l'affichage suivant.

```
n=?2
2.0
1.5
1.4166666666666665
1.4142156862745097
1.4142135623746899
1.414213562373095
1.414213562373095
1.414213562373095
```

On obtient une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près à l'étape 3, à 10^{-8} près à l'étape 5.
3. Il n'y a rien à modifier, il suffit de faire fonctionner le programme avec $n = 35$. On obtient une valeur approchée de $\sqrt{35}$ à 10^{-5} près à l'étape 7.

2 Dans le cœur des micros

• **Durée estimée :** 30 minutes
• **Objectif :** Utiliser les puissances pour définir une numération différente appliquée à l'informatique.

▶ **A. Parlons chiffres**

1. $1 \to 1$
$2 \to 10$
$3 \to 11$
$4 \to 100$
$5 \to 101$
$6 \to 110$
$7 \to 111$
$8 \to 1000$
$9 \to 1001$

2.
=H2+G2*2+F2*2^2+E2*2^3+D2*2^4+C2*2^5+B2*2^6+A2*2^7
L'exemple donne 125.

▶ **B. La table ASCII**

1. 2^8 nombres

2. $2^0 + 2^6 = 65$, cela correspond à la lettre A.

3.

Les élèves peuvent avoir différentes stratégies de résolution suivant leur niveau et leur avancement dans le TP :
• faire une recherche Internet.
• utiliser un tableur et la fonction DECBIN
• écrire et programmer un algorithme permettant de transformer un nombre décimal en un nombre binaire par une succession de division par 2.

4. La question est libre. I
l serait judicieux que les élèves pensent à utiliser la feuille de calcul de la partie ▶**A.**

▶**C. 1.** $A = 1\,024$, $B = 1\,048\,576$ et $C = 1\,073\,741\,824$

2. A est proche de 1 000 donc par analogie avec les différents préfixes des systèmes de mesure en décimal (longueurs, masse), on dit que A est égal à 1kilooctet.

3. Le préfixe *méga* correspond à 10^6 et *giga* à 10^9.

À noter que l'unité d'enregistrement n'est pas la seule unité en base différente de 10 :
le temps universel se mesure en base 60 (h, min, s).

Chapitre 3 Intervalles, inégalités, inéquations

↪Manuel p.70-95

Commentaires pédagogiques

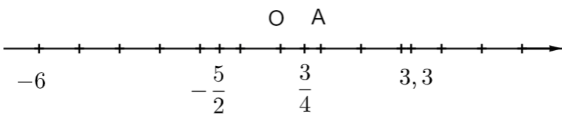
Nous avons fait le choix de regrouper dans ce chapitre des objectifs de natures diverses :
• découvrir, utiliser la notation des intervalles jusqu'à comprendre et connaître les intersections et réunions de deux intervalles,
• connaître les règles de manipulation des opérations sur les inégalités (somme, multiplication, etc. par une constante, somme de deux inégalités), par exemple sur les encadrements, et comprendre leur utilité,
• résoudre des inéquations du 1er degré que ce soit dans des exercices de technique ou des problèmes,
• connaître la notion de valeur absolue et voir ses liens avec les intervalles, les inégalités par exemple.
Les exercices proposés dans ce chapitre permettent de façon progressive l'exploitation des différentes capacités attendues pour chacun des 4 points ci-dessus.
Plusieurs notions et méthodes sont abordées dans ce chapitre (ensemble de nombres, algèbre, valeur absolue). Néanmoins ces parties sont mises en lien et les exercices permettent parfois de passer de travailler des passages entre elles.

Les capacités du chapitre sont :
• Utiliser la notation des intervalles.
• Chercher les intersection et réunion de deux intervalles.
• Connaître et utiliser les règles de manipulation des inégalités ou des encadrements.
• Résoudre une inéquation du 1er degré.
• Résoudre un problème à l'aide d'une inéquation.
• calculer et utiliser des valeurs absolues.

Corrigés des activités et des exercices

Pour prendre un bon départ p. 71

1 Placer des nombres sur une droite graduée



2 Connaître les symboles liés aux inégalités

a) inférieur.
b) supérieur ou égal.
c) inférieur.
d) inférieur.
e) supérieur ou égal.

3 Comparer des nombres

a) $-4>-5$
b) $5,5>-2$
c) $3,142\,5>3,132\,6$
d) $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$
e) $\frac{9}{4}<\frac{37}{16}$
f) $1,01>1,005$
g) $2,5\times10^{-1}>0$
h) $-a<a$ avec a un nombre positif.
i) $-a>a$ avec un nombre négatif.

4 Résoudre des équations

a)
$-2x+6=19 \Leftrightarrow -2x=19-6$

$\Leftrightarrow -2x=13 \Leftrightarrow x=-\frac{13}{2}$

$\mathcal{S}=\left\{-\frac{13}{2}\right\}.$

b)
$4x-5=x+10 \Leftrightarrow 4x-x=10+5$

$\Leftrightarrow 3x=15 \Leftrightarrow x=\dfrac{15}{3}=5$

$\mathcal{S}=\{5\}$.

c)
$2(x+5)=5x+26 \Leftrightarrow 2x+10=5x+26$

$\Leftrightarrow -3x=16 \Leftrightarrow x=-\dfrac{16}{3}$

$S=\left\{-\dfrac{16}{3}\right\}$.

5 Évaluer et comparer

a) Oui car $A=10-3=7$ si $x=2$.

b) Non car $A=-3$ si $x=0$.

c) Non car $A=-15-3=-18$ si $x=-3$.

6 Calculer des aires

L'aire du domaine hachuré est l'aire du rectangle à laquelle on soustrait l'aire du disque situé à l'intérieur et qui a pour rayon 1.

Donc $\mathcal{A}=4\times2-\pi\times1^2=8-\pi$ cm².

7 Développer une expression

$A=10x+15-2x=8x+15$

$B=-3x-18$

$C=-24+8x+2x+7=10x-17$

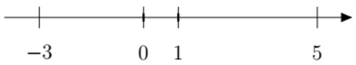
Activités

p. 72-73

1 Comprendre les intervalles

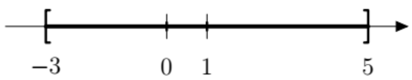
- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif** : introduire et comprendre les intervalles, notamment leur notation.

1. a) b)



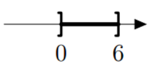
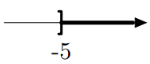
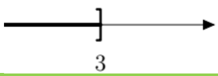
c) -3 ; -2,99 ; $\dfrac{3}{2}$ et $\sqrt{2}$ font partie de cet ensemble.

b)



2. Le premier s'écrit $]4;5]$ et le second $]2;6[$.

3.

Ensembles des nombres	Schéma	Inégalité C'est l'ensemble des nombres x tels que :	Intervalle
Compris entre 0 exclu et 6 inclus		$0<x\leqslant 6$	$]0;6]$
Strictement supérieur à -5		$x>-5$	$]-5;+\infty[$
Inférieurs ou égaux à 3		$x\leqslant 3$	$]-\infty\,;3]$

4. $\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$; $\mathbb{R}+=[0;+\infty[$ et $\mathbb{R}-=]-\infty;0]$

2 Manipuler des inégalités

• **Durée estimée :** 20 min
• **Objectif :** découvrir les propriétés de manipulation des inégalités.

1. a) La masse A.
b) Non.
2. Si $A > B$ alors $A+20 > B+20$.
3. a) Si $x \leqslant y$ alors $x+30 \leqslant y+30$.
b) Si $M > M'$ alors $M-4 > M'-4$.
c) Si $a \geqslant b$ alors $a+k \geqslant b+k$.
d) Si $x > 2$ alors $x+30 > 32$.
4. C'est faux si k est négatif (mais vrai si k est positif).
Par exemple si on prend $a=2$, $b=3$ et $k=-4$ alors : $a \leqslant b$ mais $a \times k = -8$ et $b \times k = -12$ soit $k \times a > k \times b$.
5. Notons ℓ la largeur. On a donc $\ell \leqslant 2{,}1$.
Le périmètre est égal à $12+2\ell$.
Or $2\ell \leqslant 4{,}2$ donc $12+2\ell \leqslant 16{,}2$. D'où le résultat.

3 Résoudre une inéquation

• **Durée estimée :** 25 min
• **Objectif :** utiliser les règles de manipulation des inégalités pour résoudre des inéquations.

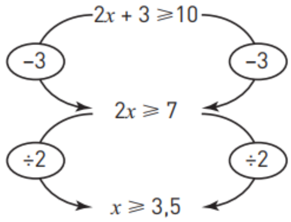
▶ A. Inéquation et solution

1. 5 est solution car $2 \times 5 + 3 = 13 \geqslant 10$.
2. Par exemple, 6,5 ; $\dfrac{20}{3}$ et 101 sont des solutions. Par exemple, 2 n'est pas solution.

▶ B. Résolution d'une inéquation

1. Oui car ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité ne va pas changer le sens de cette inégalité. On peut donc dire qu'elles sont transposables à une inéquation (si on entend par là que le sens de l'inégalité ne changera pas lors de ces opérations).
2. Tout va dépendre du nombre par lequel on devra diviser car on sait que si on divise par un nombre strictement positif, le sens de l'inégalité ne changera pas et que si on divise par un nombre strictement négatif, le sens de l'inégalité changera.

3. a)

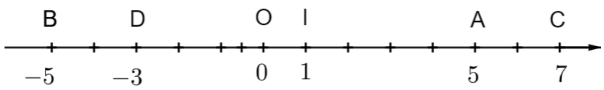


b) Les solutions sont tous les nombres supérieurs ou égaux à 3,5. On peut l'écrire aussi sous forme d'intervalle : $[3{,}5;+\infty[$.
4. a) $4x-6 \leqslant -26 \Leftrightarrow 4x \leqslant -20 \Leftrightarrow x \leqslant -5$.
b) $5x+64 \leqslant 7x+32 \Leftrightarrow -2x \leqslant -32 \Leftrightarrow x \geqslant 16$.

4 Découvrir la valeur absolue

• **Durée estimée :** 25 min
• **Objectif :** découvrir, manipuler et calculer des valeurs absolues en utilisant les distances.

1.



2. $|-5|$ est la distance entre O et B qui a pour abscisse -5. Donc $|-5|=5$.
3. Si $a > 0$ alors la distance entre le point d'abscisse a et 0 vaut a.
Si $a < 0$ alors la distance entre le point d'abscisse a et 0 vaut $-a$.
4. a) On a $|-3|=3$.
b) Cet autre nombre est 3.
5. a) $|13|=13$ **b)** $|-3{,}4|=3{,}4$
c) $|2-\pi| = -(2-\pi) = \pi-2$.
6. a) La distance entre 3 et 7 est égale à 4.
Celle entre –2 et 5 vaut 7, celle entre 12 et 5 vaut 7 et celle entre –6 et –2 vaut 4.
b) La distance entre le nombre a et le nombre b est égale à $a-b$ si $a > b$ et à $b-a$ si $a < b$.
c)

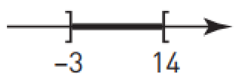
```
a=float(input("saisir a" ))
b=float(input( "saisir b" ))
if a>b :
        d=a-b
else :
        d=b-a
print(" la distance entre a et b est: " ,d)
```

Exercices résolus

À vous de jouer ! p. 75

1 $[2;4]$.

2 **a)** $]-3;14[$.
b)



3 L'intersection est $[4;5]$.
L'union est $[-10;12]$.

4 **a)** $[10;20[\cap[0;15[=[10;15[$ et $[10;20[\cup[0;15[=[0;20[$.
b) $[0;8[\cap]9,5;10]=\varnothing$ et $[0;8[\cup]9,5;10]$ ne peut pas simplifier.

5 $2,5t\geqslant 25$ et $t-7\geqslant 3$.

6 $-1<\dfrac{x}{4}<0$ et $8<x<12$.

7 $5x+7\leqslant 27\Leftrightarrow 5x\leqslant 20\Leftrightarrow x\leqslant 4$
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=]-\infty;4]$.

8 $-3x-12\geqslant 24\Leftrightarrow -3x\geqslant 36\Leftrightarrow x\leqslant -12$
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=]-\infty;-12]$.

9 C est supérieur à E pour $x\in]7;+\infty[$,
C est inférieur à E pour $x\in]-\infty;7[$.
C et E sont égaux pour $x=7$.

10 R est supérieur à S pour $a\in\left]-\infty;\dfrac{1}{3}\right[$,
R est inférieur à S pour $a\in\left]\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.
R et S sont égaux pour $a=\dfrac{1}{3}$.

11 **1.** $[4;6]$.
2. $x\in[0;10]\Leftrightarrow|x-5|\leqslant 5$ . .

12 **1.** $[-10;30]$ . .
2. $x\in[25;37]\Leftrightarrow|x-31|\leqslant 6$.

Exercices résolution de problèmes p. 80

13 Inéquation et contrainte

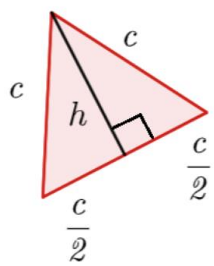
On remarque que l'inconnue est ici le nombre de trajets à effectuer.
Lilia a un budget qui ne doit pas dépasser 140 euros. Il faut donc écrire ses dépenses en fonction du nombre de trajets : on sait, en plus de la carte de réduction de 30 euros, que 1 trajet coûte 9,10 euros, 2 trajets coûtent 18,20 euros … x trajets coûtent $9,10x$ euros.
Réponse rédigée : On pose x le nombre de trajets à effectuer.
Le budget de Lilia est alors $9,10x+30$ en comptant le coût de la carte.
Il faut donc résoudre $9,10x+30\leqslant 140$.

14 Inéquation et comparaison

On remarque que l'inconnue est ici le nombre de trajets effectués.
Pour comparer les deux offres il faut exprimer chacune d'elles en fonction du nombre de trajets.
Dans le premier cas il faut prendre en compte le coût de la carte et le coût de chaque trajet.
Dans le second cas, il faut seulement prendre en compte les trajets. On peut rédiger de la façon suivante.
On pose x le nombre de trajets à effectuer.
Avec la carte de réduction, le coût total est $9,10x+30$.
Sans la carte de réduction, le coût total est $12,70x$.
Il faut donc résoudre $9,10x+30\leqslant 12,70x$.

15 Hauteur d'un triangle équilatéral

On peut faire un schéma : c est la longueur des côtés du triangle équilatéral.



On peut remarquer qu'on peut appliquer le théorème de Pythagore pour calculer la hauteur en fonction de c.
On peut rédiger de la façon suivante.
On note c la longueur des côtés du triangle équilatéral.
On peut tracer la hauteur issue de l'un des sommets. Celle-ci coupe le côté opposé en son milieu car c'est un triangle équilatéral. Cette hauteur divise le triangle en deux triangles rectangles de côtés h, c et $\frac{c}{2}$.
D'après le théorème de Pythagore, on a :
$$c^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$
Donc $h^2 = c^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{3c^2}{4}$.
Ce qui donne $h = \sqrt{\frac{3c^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.
On doit donc résoudre $\frac{\sqrt{3}}{2}c \geqslant 12$.

Exercices automatismes p. 81

Rituel 1

16 5,91 et 10,92.

17 28

18 171

19 3

20 0; 1 et 3.

Rituel 2

21 2,75

22 $-\frac{4}{3}$

23 36

24 14 cm²

25 1,4

Rituel 3

26 10^5

27 Vrai

28 Le périmètre est 12 cm et l'aire est 8 cm².

29 27 cm³

30 $\frac{23}{5}$

31 2,25

Rituel 4

32 4,18

33 2,08

34 1000 002

35 $\frac{18}{7}$

Exercices d'entraînement p. 82-88

Je consolide mes acquis

36 Lecture d'inégalités

a) x est supérieur à 6.
b) x est inférieur ou égal à 4.
c) x est supérieur ou égal à –3 et inférieur ou égal à 5.
d) x est inférieur ou égal à 25.

37 Nombres décimaux, encadrements

1. 18,8
2. $4,76 < 4,768 < 4,77$
3. $13,5 < 13,57 < 13,6$

38 Valeur approchée, encadrement

1. **a)** 6,28 **b)** 2,83 **c)** 1,33
2. **a)** $6,2 < 2\pi < 6,3$
b) $2,8 < 2\sqrt{2} < 2,9$
c) $1,3 < \frac{4}{3} < 1,4$

39 Valeur approchée et aire

1. **a)** 18,93 cm²
b) 18,94 cm²
2. 78,540 cm²

40 **Équation du 1er degré (1)**

a) $x=6,5$ **b)** $x=4$

c) $x=0$ **d)** $x=\dfrac{4}{3}$

41 **Équation du 1er degré (2)**

a) $x=12$ **b)** $x=-2$

c) $x=\dfrac{4}{5}$ **d)** $x=\dfrac{30}{7}$

e) $x=-\dfrac{9}{5}$ **f)** $x=\dfrac{10}{11}$

g) Pas de solution **h)** $x=1,5$

42 **Périmètre et équation**

1. Le périmètre est $2(\ell+2)+2\ell=4\ell+4$.

2. On résout : $4\ell+4=26$.
La largeur doit être égale à 5,5.

43 **1.** $6\times(3\times20)=360$ pas.

2. Changer tous les 20 pas en 30 pas.

3. Un triangle a désormais un périmètre égal à 90 pas. Il faut donc en tracer 3 : on remplace donc le 6 par 3.

44 **1.** $\dfrac{4}{3}\pi\times3^3\approx113,1\ \text{cm}^3$

2. $\dfrac{1}{3}\times5,5^2\times10\approx100,8\ \text{cm}^3$

3. Le volume de la boule est supérieur à celui de la pyramide.

Questions de cours

45 **1.** C'est l'ensemble des nombres réels compris entre 5 inclus et 10 exclu.

2. $]4;21[$

3. Elle n'est pas correcte car le crochet doit être ouvert en $+\infty$.

4. $[0;3]$.

46 **1.** Il doit être ouvert.

2. C'est l'ensemble des nombres réels négatifs. Il se note aussi $]-\infty;0]$.

3. On le fait en mettant un crochet ouvert (non orienté vers la borne).

47 Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux termes d'une inégalité ne change pas le sens de cette inégalité.
Multiplier ou diviser par un même nombre strictement positif les deux termes d'une inégalité ne change pas le sens de cette inégalité.
Multiplier ou diviser par un même nombre strictement négatif les deux termes d'une inégalité change le sens de cette inégalité.

48 **1.** De façon géométrique, la valeur absolue de a est, sur une droite graduée munie d'un repère, la distance entre l'origine et le point d'abscisse a.
On a aussi $|a|=a$ si a est positif et $|a|=-a$ si a est négatif.

2. Oui.

Appartenance à un intervalle

49 **a)** 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.
b) 3; 4; 5.
c) 4; 5; 6; 7.

50 **1.** 0 ; 6,5 ; 5,99 ; 6,999 ; 2π.
2. Par exemple, 0,67 ; 4,31.

51 **a)** $1,4\in[0;7]$

b) $6\in\left[\dfrac{7}{3};+\infty\right[$

c) $-3\notin\,]-\infty;-3,5[$

52 **a)** oui **b)** oui **c)** non

Notations des intervalles

53 **a)** $[-1;3]$

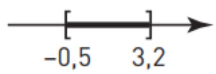
b) $]0;5]$

c) $]2;+\infty[$

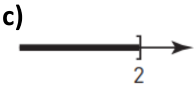
54

a)

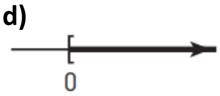
b)



c)



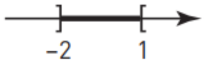
d)



55

a) $[0;3]$

b) $]-2;1[$



c) $]-\infty;9]$

d) $]-3{,}5;+\infty[$

56 **a)** $0 \leqslant x \leqslant 1{,}2$

b) $-\frac{5}{3} < x < 3$

c) $x \geqslant 4{,}73$

d) $x < 0$

57 **a)** Vrai. **b)** Faux. **c)** Faux. **d)** Vrai.

58 **1.** $[0;11\,660]$; $[11\,661;22\,040]$; $[22\,041;39\,930]$; $]39\,930;+\infty[$

2. 90%.

59 **1. a)** 95 **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{2}{n}$

2. $[1{,}4;1{,}5]$

3. $[3{,}14;3{,}15]$

Intersection et réunion d'intervalles

60

Nombre	$\in I$	$\in J$	$\in I \cap J$	$\in I \cup J$
-10	non	non	non	non
-6	oui	non	non	oui
-0,5	oui	non	non	oui
2	oui	non	non	oui
8,1	non	oui	non	oui
99,9	non	oui	non	oui
1000	non	non	non	non
5	oui	oui	oui	oui

61 **a)** $[20;25[\cap[14;21[=[20;21[$

et $[20;25[\cup[14;21[=[14;25[$.

b) $]-\infty;7{,}5]\cap[10;22]=\varnothing$

et $]-\infty;7{,}5]\cup[10;22]$ ne peut pas se simplifier.

c) $]-1;+\infty[\cap]-\infty;1[=]-1;1[$

et $]-1;+\infty[\cup]-\infty;1[=]-\infty;+\infty[$.

d) $]0;1]\cap[0{,}5;0{,}7]=[0{,}5;0{,}7]$

et $]0;1]\cup[0{,}5;0{,}7]=]0;1]$.

62 **a)** $[-1;3{,}5]\cap[1{,}7;7]=[1{,}7;3{,}5]$

b) $]-\infty;-\pi]\cup[-3\pi;\pi[=]-\infty;\pi[$

c) $[-7{,}1;2]\cap[2;+\infty[=\{2\}$

d) $[-5;0]\cup[3;+\infty[$ ne peut pas se simplifier.

63 **a)** $[-3;1[$

b) $]-\infty;-2]\cup]1;+\infty[$

c) $]-\infty;3{,}5]$

d) impossible : $\varnothing$

64 **1.** Il vaut -2 car x n'est pas inférieur ou égal à 5.

2. x doit appartenir à $]-1;5]$.

3.

```
x=3
if x>6 and x<8.1:
     y=5
else:
     y=0
```

65 **1.** x doit appartenir à $]-\infty;-1]\cup[3;+\infty[$.

2.

```
x=float(input("saisir une valeur de x"))
if x<4 or x>5:
     print("Gagné!")
else:
     print("Perdu…")
```

3.

```
x=float(input("saisir une valeur de x"))
if x<4 and x>=0:
     print("Gagné!")
else:
     print("Perdu…")
```

Manipulations des inégalités

66 **a)** $1{,}5x \leqslant 1\,500$

b) $\frac{x}{50} \leqslant 20$

c) $-\frac{1}{10}x \geqslant -100$

d) $x - 30 \leqslant 970$

67 **a)** $-8 \leqslant x - 10 \leqslant -6$

b) $3 \leqslant 1{,}5x \leqslant 6$

c) $17 \leqslant x + 15 \leqslant 19$

d) $-8 \geqslant -4x \geqslant -16$

68 **1.** Il peut affirmer qu'il possède entre 130 et 190 euros sur son compte.
2. Il peut affirmer qu'il possède entre 50 et 110 euros sur son compte.

69 $-9{,}2 > -2S > -9{,}4$.

70 **1.** $-6 \leqslant 2a \leqslant 3$ donc $-14 \leqslant 2a - 8 \leqslant -5$.
2. a) $0 \leqslant 3a + 9 \leqslant 13{,}5$.
b) $13 \geqslant -4a + 1 \geqslant -5$.
c) $0 \leqslant \dfrac{a+3}{2} \leqslant 2{,}25$.

71 **a)** $2{,}82 < 2\sqrt{2} < 2{,}84$
b) $0{,}91 < \sqrt{2} - 0{,}5 < 0{,}92$
c) $4{,}41 < \sqrt{2} + 3 < 4{,}42$
d) $2{,}16 < 5 - 2\sqrt{2} < 2{,}18$

72 **a)** $3m \leqslant 12$ **b)** $m - 1 \leqslant 3$ **c)** $3m - 2 \leqslant 10$

73 **a)** $2x \in [2;4[$
b) $-0{,}5x \in]-1;-0{,}5]$
c) $3x - 1 \in [2;5[$
d) $5 - 2x \in]1;3]$

74 **a)** $\left[\dfrac{8}{5};\dfrac{32}{5}\right]$
b) $[0;48]$
c) $[-2;4]$
d) $[7{,}6;10]$

75 **1.** 5,76
2. a) 10,54 ; 10,54 ; 10,12 ; 10,54 ; 10,54.
b) $10{,}535 \leqslant m \leqslant 10{,}545$
c) $10\,535 \leqslant 1\,000\,m \leqslant 10545$

76 **1.** $p = 20\pi$
2. a) $62 < p < 64$
b) $62{,}83 < p < 62{,}832$
3. Dans le deuxième cas, l'amplitude de l'intervalle est 0,002 m soit 0,2 cm.
Si on prend $3{,}141 < \pi < 3{,}142$ on obtient $62{,}82 < p < 62{,}84$. L'amplitude est alors 0,02 m= 2 cm. On peut donner p à 1 cm près en prenant $p \approx 62{,}83$.

77 $25\,710 \leqslant R \leqslant 73\,516$ donc $1\,718{,}86 \leqslant I \leqslant 16\,060{,}66$

78 Entre 52,5 et 59,5 km.

79 D'après l'énoncé, $89{,}1 \leqslant I \leqslant 90{,}9$ en mA.
Donc $0{,}0891 \leqslant I \leqslant 0{,}0909$ en A.
Alors $3{,}564 \leqslant U \leqslant 3{,}636$ en V.

80 **Histoire des maths**

1. Comme $\dfrac{223}{71} < \pi < \dfrac{22}{7}$ et comme le périmètre p vaut 10π alors $\dfrac{2\,230}{71} < p < \dfrac{220}{7}$.
2. On trouve $\dfrac{2\,230}{71} \approx 31{,}41$ et $\dfrac{220}{7} \approx 31{,}43$.
3. On trouve $31{,}4 < p < 31{,}5$
4. π est le rapport entre le périmètre d'un cercle et son diamètre. Archimède a utilisé des polygones ayant n côtés inscrit dans le cercle et circonscrit au cercle afin de d'encadrer son périmètre. Plus n augmente, meilleure est la précision de l'encadrement.

Opérations sur les inégalités

81 **a)** $a + b < 7 + 8$ soit $a + b < 15$
b) $2a < 14$
c) $2a + b < 22$

82 **1.** $15 \leqslant 3x \leqslant 18$.
2. $8 \leqslant 4y \leqslant 12$.
3. $23 \leqslant 3x + 4y \leqslant 30$.

83 **a)** $1{,}4 \leqslant x + y \leqslant 4{,}2$
b) $1{,}4 \leqslant x + 3y \leqslant 6{,}2$
c) D'abord $0 \geqslant -y \geqslant -1$ soit $-1 \leqslant -y \leqslant 0$.
Alors $0{,}4 \leqslant x - y \leqslant 3{,}2$.
d) $-0{,}2 \leqslant 2x - 3y \leqslant 6{,}4$.

84 **1.** $p = 2\ell + 2L$.
$4{,}8 \leqslant 2\ell \leqslant 5$ et $11{,}08 \leqslant 2L \leqslant 11{,}12$.
Donc $15{,}88 \leqslant p \leqslant 16{,}12$.
2. $15{,}8 \leqslant p \leqslant 16{,}2$.

85 On a $190 \leqslant x \leqslant 200$ et $56 \leqslant y \leqslant 60$.

Donc $314{,}2 \leqslant 1{,}3x+1{,}2y \leqslant 332$. Son bénéfice total l'année prochaine sera compris entre 314,20 euros et 332 euros.

86 **1.a)** $(b+c)-(a+c)=b-a>0$.

b) $a+c<b+c$.

2.a) $k>0$ et $b-a>0$ donc $k(b-a)=kb-ka>0$ (strictement positif).

b) $ka<kb$.

3. Dans ce cas, $k<0$ et $b-a>0$ donc $k(b-a)=kb-ka<0$ (strictement négatif).

Donc $ka>kb$.

Résolution d'une inéquation

87 **1.a)** $x+2 \geqslant 12 \Leftrightarrow x \geqslant 10$

b) $x-11 \leqslant 10 \Leftrightarrow x \leqslant 21$

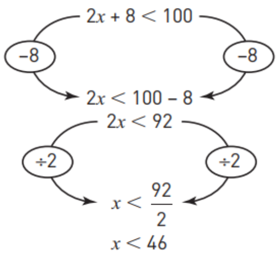
c) $25+x>12 \Leftrightarrow x>-13$

2.a) $4x \leqslant 36 \Leftrightarrow x \leqslant 9$

b) $-2x \leqslant 24 \Leftrightarrow x \geqslant -12$

c) $6x<33 \Leftrightarrow x<5{,}5$

88



89 $-4x-40>60$

$\Leftrightarrow -4x>60+40$ (en additionnant 40 à chacun des membres)

$\Leftrightarrow -4x>100$

$\Leftrightarrow x<\dfrac{100}{-4}$ (en divisant par (-4) qui est négatif)

$\Leftrightarrow x<-25$

90 **a)** $x \leqslant 4$ donc $\mathcal{S}=]-\infty;4]$.

b) $x<-7{,}5$ donc $\mathcal{S}=]-\infty;-7{,}5[$.

c) $x \geqslant 3$ donc $\mathcal{S}=[3;+\infty[$.

d) $x \leqslant -36$ donc $\mathcal{S}=]-\infty;-36]$.

e) $x>-3$ donc $\mathcal{S}=]-3;+\infty[$.

f) $x>\dfrac{1}{5}$ donc $\mathcal{S}=\left]\dfrac{1}{5};+\infty\right[$.

91 **a)** $x \geqslant 16$ soit $\mathcal{S}=[16;+\infty[$.

b) $x<-6$ soit $\mathcal{S}=]-\infty;-6[$.

c) $x \leqslant 3{,}2$ soit $\mathcal{S}=]-\infty;3{,}2]$.

d) $x>-6$ soit $\mathcal{S}=]-6;+\infty[$.

92 **a)** $x<-\dfrac{3}{4}$ donc $\mathcal{S}=\left]-\infty;-\dfrac{3}{4}\right]$

b) $x \leqslant -5$ donc $\mathcal{S}=]-\infty;-5]$

c) $x>-4$ donc $\mathcal{S}=]-4;+\infty[$

d) $x \leqslant 5$ donc $\mathcal{S}=]-\infty;5]$

93 **a)** $x>-8{,}5$ donc $\mathcal{S}=]-8{,}5;+\infty[$

b) $x>-0{,}5$ donc $\mathcal{S}=]-0{,}5;+\infty[$

c) $a \leqslant 1{,}5$ donc $S=]-\infty;1{,}5]$

d) $t>0$ donc $\mathcal{S}=]0;+\infty[$

94 **a)** $\mathcal{S}=\left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$

b) $\mathcal{S}=\left]-\infty;-\dfrac{1}{8}\right]$

c) $\mathcal{S}=\left[-\dfrac{63}{4};+\infty\right[$

d) $\mathcal{S}=\left]-\dfrac{25}{14};+\infty\right[$

95 **1.** $3\times 35+4=109>100$ donc 35 est bien solution.

2. a) Il teste et affiche si les nombres entiers de 0 à 50 sont solutions de $3x+4>100$.

b) Il va afficher les nombres entiers de 33 à 50.

3.

```
for i in range(0,61):
    if 55-2*i>i-23:
        print(i)
```

96 **1.** Éléonore a tort car on obtient $2>21$ ce qui est impossible.

2. Samy a raison car on a :

$-3x+7 \geqslant 5-3x \Leftrightarrow 7 \geqslant 5$ ce qui est vrai pour tous les nombres réels.

3. a) $\mathcal{S}=\varnothing$ (pas de solution)

b) $\mathcal{S}=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

Comparaison de deux expressions

97 $x > 95{,}5$.

98 **a)** $5+2x$ est supérieur à $x+9$ pour $x \in]4;+\infty[$, inférieur pour $x \in]-\infty;4[$ et égal pour $x=4$.

b) $9+\frac{1}{2}x$ est supérieur à 1 pour $x \in]-16;+\infty[$, inférieur pour $x \in]-\infty;-16[$ et égal pour $x=-16$.

c) A est supérieur à B pour $x \in]-\infty;15[$,
A est inférieur à B pour $x \in]15;+\infty[$,
A est égal à B pour $x=15$.

d) $-2t+9$ est supérieur à $-2t+3$ pour tout réel t.

99 L'aire de la première figure est $3+1{,}5x$ et l'aire de la deuxième est $4x$ pour tout $x \geqslant 0$.
On trouve que l'aire de la première figure est supérieure à l'aire de la deuxième figure pour $x \in]0;1{,}2[$, inférieure si $x \in]1{,}2;+\infty[$ et égale pour $x=1{,}2$.

100 Le résultat du premier programme en fonction de la valeur saisie t est $4t+2$
Le résultat du deuxième programme en fonction de la valeur saisie t est $0{,}5(t+6)=0{,}5t+3$.
Le résultat du premier programme est supérieur à celui du deuxième pour $t \in \left[\frac{2}{7};+\infty\right[$, inférieur pour $t \in \left]-\infty;\frac{2}{7}\right[$ et les résultats sont égaux pour $t=\frac{2}{7}$.

101 **1.** Il est positif pour toutes valeurs réelles de x.
2. $2+x+x^2$ est supérieur à $1+x$ pour toutes valeurs de x.

102 **1. a)** A > B donc en divisant par B > 0, on a $\frac{A}{B}>1$.
b) C < B donc en divisant par B > 0, on a $\frac{C}{B}<1$.
2. a) $3\sqrt{2}+4>7$.
b) Oui car $3\sqrt{2}+4>7$ et d'après **1. a)**.
3. On a $2x+7>2x+3>0$ car $x>1$.
Donc $\frac{2x+3}{2x+7}<1$ d'après **1.b)**.

Inéquations et problèmes (avec modélisation)

103 L'inéquation est $1{,}50x-2{,}90 \geqslant 25$.
$1{,}50x-2{,}90 \geqslant 25 \Leftrightarrow 1{,}50x \geqslant 27{,}90 \Leftrightarrow x \geqslant 18{,}6$.
Elle doit vendre au moins 18,6 kg de carottes.

104 **Modéliser une situation**
Posons n le nombre de trajets annuels.
L'inéquation à résoudre est $120>2+1{,}90n$.
$120-2>1{,}90n \Leftrightarrow 118>1{,}90n \Leftrightarrow \frac{118}{1{,}9}>n$.
Or $\frac{118}{1{,}9} \approx 62{,}1$.
Si on fait 62 trajets ou moins annuellement, le tarif Unit' est plus intéressant.

105 On résout $2x+4+\frac{6x}{2}>50$ c'est-à-dire $5x+4>50$.
Il faut prendre $x>\frac{46}{5}$ cm $\left(\frac{46}{5}=9{,}2\right)$.

106 **Esprit critique**
1. Posons n le nombre d'années passées depuis le 1er Janvier 2019.
On cherche donc n tel que
$5933185+41\,600n>6\,500\,000$.
On trouve $n \geqslant \frac{566\,815}{41\,600}$ ce qui donne $n \geqslant 14$.
C'est donc en $2019+14=2033$.
2. On cherche n tel que
$5\,933\,185+41\,600n>6\,010\,289+27\,700n$.
On trouve $n \geqslant \frac{77\,104}{13\,900}$ ce qui donne $n \geq 6$.
C'est donc en $2019+6=2025$.
3. D'après le modèle, la population en Occitanie est $5\,933\,185+41\,600 \times 3=6\,057\,985$. Ce nombre est supérieur au nombre relevé (d'environ 4 000 habitants). On peut donc se poser la question de

l'avenir du modèle sur le long terme et relativiser les résultats trouvés précédemment.

Il s'agit ici de se questionner dans la question 3 de la validité d'un modèle et de son impact.

107 Dans le premier cas, la somme cumulée au bout de x mois est $100\,000+1\,400x$

Dans le second cas, la somme cumulée au bout de x mois est $5\,000+2\,000x$

$100\,000+1\,400x<5\,000+2\,000x$.

$100\,000+1\,400x<5\,000+2\,000x$

$\Leftrightarrow 95\,000<600x \Leftrightarrow \dfrac{475}{3}<x$.

La deuxième offre est plus intéressante pour plus de 159 mois passés, moins intéressante sinon.

108 **Modéliser une situation**

Posons $x=\text{AM}$.

$x\in[0;3]$ et l'aire de AMNP est x^2, celle de CJNI est $(5-x)(3-x)$.

On résout $x^2\geqslant(5-x)(3-x)$:

on trouve $x\geqslant\dfrac{15}{8}$. Ainsi $\mathcal{S}=\left[\dfrac{15}{8};3\right]$.

109 **Réaliser un schéma**

Il s'agit de comparer l'aire du nouveau jardin de Lou $(5+x)(6+x)$ et celle du nouveau jardin d'Harry : $(2+x)(12{,}5+x)$.

La surface du jardin de Lou est supérieure à celle du jardin d'Harry pour $0{,}50\leqslant x<\dfrac{10}{7}$, égale pour $x=\dfrac{10}{7}$. et inférieure pour $5\geqslant x>\dfrac{10}{7}$.

Calculs avec une valeur absolue

110 **a)** 4 **b)** 3,8 **c)** $\dfrac{100}{3}$

d) 1 **e)** $\sqrt{17}-2$ **f)** $\sqrt{17}-2$

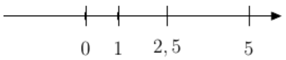
111 **a)** 7 **b)** 0 **c)** 0 **d)** 16

112 **a)** Vrai (3=3)

b) Faux ($2\neq-2$)

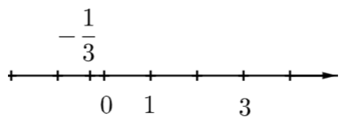
c) Faux ($12\neq-12$)

113 **1. a)**



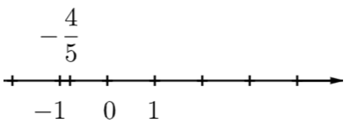
b) La distance entre 2,5 et 5 est 2,5.

2. a)



b) La distance entre $-\dfrac{1}{3}$ et 3 est $3-\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{10}{3}$.

3) a)



b) La distance entre $-\dfrac{4}{5}$ et -1 est $-\dfrac{4}{5}-(-1)=\dfrac{1}{5}$

.

114 **a)** $\left|\dfrac{125}{3}-2\right|$ **b)** $\left|\sqrt{2}-5\right|$

c) $\left|-5-\dfrac{12}{5}\right|$ **d)** $|\pi-4|$

Intervalle et valeur absolue

115 **a)** la distance entre x et 100.

b) La distance entre x et $\dfrac{1}{3}$.

c) La distance entre x et -5.

d)La distance entre 1,35 et $-x$ ou la distance entre x et -1,35

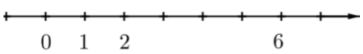
e) La distance entre -7 et x.

f) La distance entre π et x.

116 **a)** $[9;11]$ **b)** $[2{,}3;2{,}7]$ **c)** $[-2;3]$

117 **a)** $[-8;-2]$ **b)** $[-3;1]$ **c)** $]2;4[$

118 **1. a)**



b) Centre : 4 et rayon :2

c) $|x-4|$ représente la distance entre x et 4.

d) $x\in[2;6]\Leftrightarrow|x-4|\leqslant2$.

2.) a) $x \in [1;25] \Leftrightarrow |x-13| \leqslant 12$.

b) $x \in [6;20] \Leftrightarrow |x-13| \leqslant 7$.

c) $x \in [1,2;3] \Leftrightarrow |x-2,1| \leqslant 0,9$.

119 **a)** $|x-0,5| \leqslant 4,5$

b) $|x-0,55| \leqslant 0,55$

c) $\left|x-\frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{6}$

À chacun son rythme

120

Énoncé A

1. $x \in [0;10]$.

2. L'aire de la figure est donnée par

$\mathcal{A}_{\text{ABCF}}+\mathcal{A}_{\text{FEN}}+\mathcal{A}_{\text{NCD}}$

$=10\times 2+\frac{6x}{2}+\frac{8\times(10-x)}{2}$

$=20+3x-4x+40$

$=60-x$

3) Si $1 \leqslant x \leqslant 2$ alors $-1 \geqslant -x \geqslant -2$ et donc $59 \geqslant 60-x \geqslant 58$ d'où le résultat.

Énoncé B

1. L'aire de NEF est $\frac{6\text{ AM}}{2}=3\text{ AM}$ et l'aire de DCN est $\frac{8\times(10-\text{AM})}{2}=40-4\text{ AM}$ pour tout réel $x \in [0;10]$.

2. Il s'agit de trouver les valeurs de x telles que :

$3x \geqslant 40-4x$

$\Leftrightarrow 7x \geqslant 40$

$\Leftrightarrow x \geqslant \frac{40}{7}$.

L'aire de NEF est supérieure ou égale à celle de DCN si $\frac{40}{7} \leqslant x \leqslant 10$.

Énoncé C

Posons $x=\text{AM}$. $x \in [0;10]$.

Alors l'aire de AMNE est : $\frac{2+8}{2}\times x=5x$.

Alors l'aire de MBDN est :

$\frac{2+10}{2}\times(10-x)=60-6x$.

Le problème revient à résoudre :

$5x \geqslant 60-6x \Leftrightarrow x \geqslant \frac{60}{11}$.

L'aire de AMNE est supérieure ou égale à celle de MBDN si $\frac{60}{11} \leqslant x \leqslant 10$

L'énoncé A porte sur l'ensemble de la figure puis sur un encadrement. L'énoncé B n'est pas plus difficile et revient sur les inéquations après avoir exprimer des aires de triangles. L'énoncé C est, quant à lui, ouvert et porte sur des trapèzes.

Exercices de synthèse

p. 89

121 Deux inéquations

1. a) $2x+9 \geqslant 19-2x \Leftrightarrow 4x \geqslant 10 \Leftrightarrow x \geqslant 2,5$

donc $\mathcal{S}=[2,5;+\infty[$.

b) $-2(x-15)>3+x$

$\Leftrightarrow -2x+30>3+x$

$\Leftrightarrow -3x>-27 \Leftrightarrow x<9$

donc $\mathcal{S}=]-\infty;9[$.

2. Attention: dans l'énoncé lire $\text{J}=]-\infty;-9[$

On a $\text{I}\cap\text{J}=[2,5;9[$.

3. On a $2,5 \leqslant t<9$ donc $7,5 \leqslant 3t<27$ donc $5,5 \leqslant 3t-2<25$.

122 Vrai ou faux ?

a) Faux avec comme contre-exemple le nombre 13 qui appartient au premier intervalle mais pas au deuxième.

b) Vrai.

c) Faux avec le contre-exemple $x=1$ car $1<3$ mais $1-3<0$.

d) Vrai car si $t \geq -2$ alors $-2t \leqslant 4$ donc $-2t+5 \leqslant 9 \leqslant 10$.

e) Vrai car on a alors $3x \geqslant 9$ et $4y \geqslant 8$ et donc $3x+4y \geqslant 17$.

f) Vrai car le rayon de cet intervalle est 1 et donc le centre est $6-1=5$.

g) Faux car par exemple $10,5 \in [4;11]$ mais $|10,5-7|=3,5>3$.

123 Un problème d'aire

1. $x \in [0;12]$.

2. a) L'aire de ADCM est

$\frac{\text{AM}+\text{DC}}{2}\times\text{AD}=\frac{\text{AM}+5}{2}\times 8=4\text{AM}+20$.

b) Si $0 \leqslant AM \leqslant 3$ alors $20 \leqslant \mathcal{A}_{ADCM} \leqslant 32$.

3. On résout $4x+20 > \dfrac{(12-x)\times 8}{2}$

$\Leftrightarrow 4x+20 > 48-4x$

$\Leftrightarrow x > 3,5$ donc $x \in]3,5;12]$.

124 Comparaison de programmes

1. Avec $x=2$, le premier programme affichera 19 et le deuxième programme affichera -24.

2. Avec x en valeur de départ, le résultat du premier programme est $3x^2+2x+3$ et celui du deuxième programme est

$(3x+6)(x-4)=3x^2-12x+6x-24=3x^2-6x-24$

On cherche toutes les valeurs de x telles que :

$3x^2+2x+3 \geqslant 3x^2-6x-24$

$\Leftrightarrow 8x \geqslant -27$

$\Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{28}{7}$ Il faut choisir $x \geqslant -\dfrac{28}{7}$ pour que le résultat du premier programme soit supérieur ou égal à celui du deuxième.

125 Comparaison de deux offres

1. Pour la première offre, Ernest paiera

$11,9+600\times 0,554\,03=344,318$ euros.

Pour la deuxième, il paiera

$11,36\times 12+600\times 0,174=240,72$ euros.

La deuxième offre est donc plus intéressante.

2. a) Avec le fournisseur A, on paiera

$11,9+0,55403\,x$ euros.

b) Le fournisseur A est plus intéressant si :

$11,9+0,554\,03x < 11,36\times 12+0,174x$.

On trouve $x < 327,3952$.

L'offre du fournisseur A est plus intéressante si on consomme moins de 327,3952 kWh.

c) Les deux offres sont équivalentes si

$11,9+0,55403x=11,36\times 12+0,174x$.

On trouve $x=327,3952$.

On en déduit que :

L'offre du fournisseur A est équivalente à celle du fournisseur B si on consomme 327,3952 kWh.

L'offre du fournisseur A est plus intéressante si on consomme moins de 327,3952 kWh.

L'offre du fournisseur B est plus intéressante si on consomme plus de 327,3952 kWh.

126 Périmètre contraint

Notons x la longueur du côté d'un des petits carrés. D'après la figure on sait déjà que x ne peut pas dépasser 5 cm.

De plus le périmètre de la figure ne doit pas dépasser 100 cm.Or le périmètre de la figure vaut

$24x+(10-2x)\times 4=40-16x$.

Donc la contrainte donne $40-16x<100$ soit $x<3,75$.

Il n'est pas possible de donner n'importe quelle valeur à x, celle-ci ne doit pas dépasser 3,75 cm.

Exercices d'approfondissement

p. 90

127 Vrai ou faux ?

Propriété ①: fausse, par exemple en prenant $a=2$ et $b=-4$, l'égalité n'est pas vérifiée.

Propriété ② : vraie, par exemple en prenant $a=0$ et $b=1$, l'égalité est vérifiée.

Propriété ③ : vraie, car si $a \geqslant 0$ alors $|-a|=a=|a|$ et si $a<0$ alors $|-a|=-a=|a|$ car $-a$ est positif.

128 Somme d'inégalités

1. $a+c<b+c$.

2. $b+c<b+d$.

3. On en déduit que $a+c<b+d$.

129 Multiplication d'inégalités (1)

1. $ac<bc$ car c est strictement positif.

2. $bc<bd$ car b est strictement positif.

3. On en déduit que $ac<bc$.

Propriété : si a, b, c et d sont quatre nombres strictement positifs tels que $a<b$ et $c<d$ alors $ac<bc$.

4. Si $a=-2$ et $b=-1$ et $c=-4$ et $d=2$, alors $ac=8$, $bd=-2$ donc nous n'avons pas $ac<bd$.

Elle n'est donc pas vraie pour tous les nombres réels a, b, c et d.

130 Valeurs absolues

1. Si $a \geqslant 0$, on a $\sqrt{a^2}=a$ par définition de la racine carrée et donc $\sqrt{a^2}=|a|$ car a positif.

Si $a<0$, alors $-a$ est positif et on a

$\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=-a$ par définition de la racine carrée et donc $\sqrt{a^2}=|a|$ car $|a|=-a$.

2. Si $a \geqslant b$ alors $AB=a-b$.

De plus $a-b \geqslant 0$ donc $|a-b|=a-b$ et alors $AB=|a-b|$.

Si $a<b$ alors $\text{AB}=b-a$. De plus $a-b<0$, donc $|a-b|=-(a-b)=-a+b=b-a$ et alors

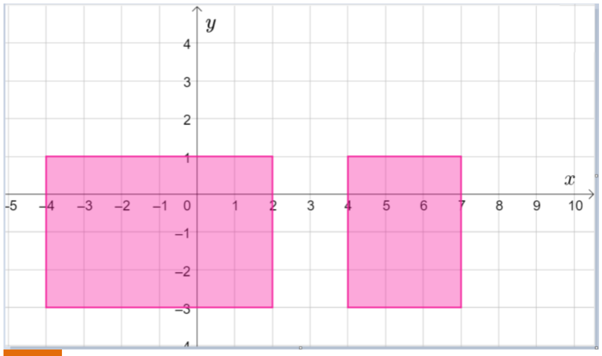
$\text{AB}=|a-b|$.

131 Du repérage

$|x-3|\geqslant 1 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty;2\right]\cup\left[4;+\infty\right[$

$|y+1|\leqslant 2 \Leftrightarrow y\in[-3;1]$

Cela donne :



132 Multiplication d'inégalités (2)

1. Elle est comprise entre

$6\,352\times3{,}14=19\,945{,}28$ et

$6\,385\times3{,}15=20\,112{,}75$ km.

2. Il doit mobiliser entre $35\times2=70$ et

$50\times10=500$ minutes.

3. Le volume de sang prélevé est compris entre 0,049 et 0,051 L.

La masse de glucose est comprise entre

$0{,}74\times0{,}049=0{,}036\,26$ g et

$1{,}06\times0{,}051=0{,}054\,06$ g.

133 Résolution par un programme

1.

$$ax+b=cx+d \Leftrightarrow ax-cx=d-b \Leftrightarrow x(a-c)=d-b \Leftrightarrow x=\frac{d-b}{a-c} \text{ car } a-c\neq 0.$$

2.

```
a=float(input(" saisir a de ax+b<cx+d ")
b=float(input(" saisir b de ax+b<cx+d ")
c=float(input(" saisir c de ax+b<cx+d ")
d=float(input(" saisir d de ax+b<cx+d ")
if a=c and b<d :
    print( "tous les nombres sont solutions")
if a=c and b>=d :
    print("pas de solution")
if  a= !c :
    solut <-  (d-b)/(a-c)
    if a < c :
       print(" S=] ", solut, ";+infini[")
   else :
       print( " S=]-infini; ", solut, " [" )
```

Vers la 1re

134 Vers la spécialité Maths

1. Si $x\geqslant3$ alors $3x-4\geqslant5>0$.

Donc $3x-4$ est positif.

2. Si $t>-6$ alors $t+7>1$.

De plus $t^2\geqslant0$ car c'est un carré.

On en déduit que $t^2+t+7>1>0$.

3. On sait que pour n entier naturel $2^n>0$.

On sait que $1<2$ donc $1\times2^n<2\times2^n$ ce qui donne

$2^n<2^{n+1}$.

4. $n=5$.

135 Vers STMG-STL-STI2D

1. 2024 pour $n=3$ donc : $p(3)=22530$.

2. On résout $p(n) > 25000$ et on obtient $n > \frac{400}{51}$

avec $\frac{400}{51} \approx 7{,}8$.

C'est donc pour $n = 8$ soit en 2029.

Préparer le contrôle
Je me teste

p. 92

Objectif 1 Utiliser les intervalles

136 B et C   **137** B

138 D   **139** B

Objectif 2 Manipuler les inégalités

140 A

141 A et C

142 B et C

Objectif 3 Utiliser les inéquations

143 B   **144** B

145 D   **146** A

Objectif 4 Calculer et interpréter des valeurs absolues

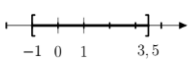
147 B   **148** B et C   **149** C

Préparer le contrôle
Je m'entraîne

p. 93

Objectif 1 Utiliser les intervalles

150 **1.**



2. -1 ; 0,5 ; 1,233 ; 3,4 appartiennent à cet intervalle et -2 ; -100 ; 3,501 ; 67 n'y appartiennent pas.

151 **a)** $-3 \leqslant x \leqslant 16$ **b)** $x \geqslant -8$

152 **a)** $]5;12]$ **b)** $]-\infty;4]$

153 L'intersection est $[8;10]$ et la réunion est $[5;12]$.

154 Faux.

155 L'intersection est $]-3;5[$ et la réunion est $[-3;8]$.

Objectif 2 Manipuler les inégalités

156 $5x \leqslant 50$; $x-12 \leqslant -2$ et $x+y \leqslant 15$.

157 $1{,}2 < \sqrt{5}-1 < 1{,}3$ et $11 < 5\sqrt{5} < 11{,}5$.

158 $[8;+\infty[$.

159 $11 \leqslant 2x+1 \leqslant 15$; $-5 \geqslant 10-3x \geqslant -11$ et $1 \leqslant x+2y \leqslant 17$.

160 Vrai.

Objectif 3 Utiliser les inéquations

161 **a)** $\mathcal{S} =]8;+\infty[$

b) $\mathcal{S} =]-\infty;0{,}5[$.

162 $A > B$ si $x < \frac{14}{5}$

$A = B$ si $x = \frac{14}{5}$

et $A < B$ si $x > \frac{14}{5}$.

163 **a)** $\mathcal{S} =]-\infty;20]$

b) $\mathcal{S} = \left[\frac{10}{17};+\infty\right[$.

164 Le tarif A est plus avantageux pour un temps supérieur à 6h15min.

165 $\mathcal{S} = \left]-\infty;\frac{648}{35}\right]$

Objectif 4 Calculer et interpréter des valeurs absolues

166 **a)** 2 **b)** 6

167 **a)** $12-\sqrt{7}$ **b)** $\sqrt{7}+3$ **c)** $\sqrt{7}-2$

168 $[8;32]$

169 $\left[-\frac{7}{10};\frac{3}{10}\right]$

Travaux pratiques p. 94-95

1 Algorithme de recherche de solutions et optimisation

• **Durée estimée :** 45 min

• **Objectif :** Utiliser des programmes **Python** pour déterminer des solutions d'inéquations.

▶ A. Un cas particulier avec une inéquation du 1er degré

1. Il leur reste alors 18 550 euros.

Notons x le nombre de planches pour débutants qu'ils peuvent acheter: on doit résoudre $1\,100x \leqslant 18\,550$ ce qui donne $x \leqslant \frac{371}{22}$ soit 16 planches pour débutants au maximum.

2. Remplacer les pointillés par 35000.

3. Oui.

▶ B. Avec deux inconnues

1. Si les gérants achètent 32 planches pour débutants ou plus, cela coûtera au minimum 35200 euros et s'ils achètent 15 planches pour confirmés ou plus, cela coûtera au minimum 35250 euros. Dans les deux cas cela dépasse le budget.

2. $20\times1\,100+3\times2\,350=29\,050$ donc cela est possible.

3. Le coût des planches est $1\,100x+2\,350y$ donc la contrainte de budget donne $1\,100x+2\,350y\leqslant35\,000$.

4. On remplace les premiers pointillés par `2350` et les deuxièmes par `35000`.

6. a) La recette par heure est $13x+32y$ euros.

c) Oui et la recette est alors 450 euros par heure.

d) La recette maximale est 468 euros par heure pour 4 planches débutants et 13 planches confirmés.

7. Dans ce programme, une variable `recettemax` prend à chaque calcul des recettes la valeur calculée si cette recette est supérieure à l'ancienne valeur de `recettemax`. Ainsi `recettemax` retiendra la plus grande valeur atteinte.

8. Dans ce cas la recette maximale atteinte est 461 euros de l'heure. On peut l'obtenir en modifiant le programme de la question **7.** ainsi :

```
recettemax=0
for x in range(0,33):
    for y in range(0,16):
        if 1100*x+2350*y<=35000 and x+y<=15:
            recette= 13*x+32*y
            if recette>recettemax:
                recettemax=recette
print(recettemax)
```

2 Comparaison de fréquentations

• **Durée estimée :** 45 min

• **Objectif :** Répondre de deux manières différentes à un problème en utilisant le tableur ou les inéquations.

▶ A. Analyse avec le tableur

2. Le nombre de visiteurs de l'expositions sur les baleines devient négatif. Il y a donc un problème.

3. C'est le jour n°20.

▶ B. Avec une inéquation

1. On compte 30 visiteurs de plus chaque jour par rapport à la veille donc on ajoute 30 par nombre de jours passés soit $250+30n$.

2. Le nombre de visiteurs au bout de n jours à l'exposition sur les baleines est $1\,000-10n$.

On cherche donc la plus petite valeur de n telle que $1\,000-10n<250+30n$.

$750<40n$ donc $18{,}75<n$.C'est au bout de 19 jours (soit le jour numéro 20) que le nombre de visiteurs de l'expo sur les baleines deviendra pour la première fois inférieur à celui de l'exposition sur les océans.

3. a) C'est le jour n°39.

b) C'est le jour n°30.

Chapitre 4 Calcul littéral

↪Manuel p.96-121

Commentaires pédagogiques

Ce chapitre s'inscrit dans le cadre général du thème « Nombres et calculs » déjà travaillé au cycle 4. Il s'agit de :

- développer la pratique du calcul algébrique,
- résoudre des problèmes modélises par des équations se ramenant au premier degré.

La première partie des activités proposées sont des exercices techniques permettant à l'élève de consolider ses connaissances de collèges et d'approfondir ses savoirs en termes de calcul littéral. Le large choix d'exercices aux niveaux de difficultés divers et progressifs doit amener les élèves à acquérir des automatismes en permettant à l'enseignant de pouvoir proposer des parcours différenciés.
Cet entrainement technique est indispensable avant que l'élève puisse s'engager dans la résolution de problèmes.
Ce type d'exercice de mise en situation est l'objet de la deuxième partie du chapitre. Afin de motiver les élèves, les situations proposées sont, le plus souvent, extraites de la vie quotidienne ou de problèmes historiques.

Les capacités mises en jeu dans ce chapitre sont :

- Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires.
- Sur des cas simples de relations entre variables, exprimer une variable en fonction des autres.
- Choisir la forme la plus adaptée (factorisée, développée, réduite) d'une expression en vue de la résolution d'un problème.
- Comparer deux quantités en utilisant leur différence, ou leur quotient dans le cas positif.

Corrigés des activités et des exercices

Pour prendre un bon départ p. 97

1 Reconnaître des carrés parfaits

121 ; 49 ; 36 sont des carrés parfaits.

2 Identifier un double produit 2×*a* ×*b*

$30=2\times3\times5$

$40=2\times4\times5$

$54=2\times3\times9$

$56=2\times4\times7$

3 Vérifier qu'un nombre est solution d'une équation

Pour $x=-3$:

a) $2x+1=2\times(-3)+1=-6+1=-5$

$\Leftrightarrow 2x+1\neq-4$

Donc -3 n'est pas solution de l'équation $2x+1=-4$

b) $x^2+1=(-3)^2+1=9+1=10$

Donc -3 est solution de l'équation $x^2+1=10$

c) $(x+3)(x-4)$

$=(-3-3)(-3+4)=0\times(-7)=0$

Donc -3 est solution de l'équation $(x+3)(x-4)=0$

4 Résoudre des équations

a) $3x-7=4$

$\Leftrightarrow 3x=4+7=11 \Leftrightarrow x=\dfrac{11}{3}$

$\mathcal{S}=\left\{\dfrac{11}{3}\right\}$

b) $5x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{0}{5}=0$

$\mathcal{S}=\{0\}$

c) $2x-1=5-8x \Leftrightarrow 2x+8x=5+1$

$\Leftrightarrow 10x=6 \Leftrightarrow x=\dfrac{6}{10}$

$\mathcal{S}=\left\{\dfrac{3}{5}\right\}$

d) $\dfrac{3}{7}x=4 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{\dfrac{3}{7}}=4\times\dfrac{7}{3}=\dfrac{28}{3}$

$\mathcal{S}=\left\{\dfrac{28}{3}\right\}$

e) $x^2=4 \Leftrightarrow x=\sqrt{4}$ ou $x=-\sqrt{4}$

$\mathcal{S}=\left\{\sqrt{4};-\sqrt{4}\right\}$

f) $x^2=-64$.

Cette équation n'a pas de solution réelle.

g) $\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{-\dfrac{1}{3}}=-3$

$\mathcal{S}=\{-3\}$

h) $\dfrac{1}{x}=3 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$

$\mathcal{S}=\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

5 Calculer avec des fractions

a) $\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{2\times4+3\times7}{4\times7}=\dfrac{29}{28}$

b) $\dfrac{5}{4}-\dfrac{2}{9}=\dfrac{5\times9-2\times4}{4\times9}=\dfrac{37}{36}$

c) $\dfrac{5}{7}+\dfrac{2}{7}\times\dfrac{21}{5}=\dfrac{5\times5+2\times21}{7\times5}=\dfrac{67}{35}$

d) $2-\dfrac{3}{4}=\dfrac{2\times4-3}{4}=\dfrac{5}{4}$

6 Calculer des antécédents

On cherche x tel que

a) $f(x)=0$ soit $3x-1=0$ soit $x=\dfrac{1}{3}$

L'antécédent de 0 est $\dfrac{1}{3}$.

b) $f(x)=-2$ soit $3x-1=-2$

$3x=-2+1=-1$ soit $x=-\dfrac{1}{3}$.

L'antécédent de -2 est $-\dfrac{1}{3}$.

c) $f(x)=\dfrac{5}{7}$ soit $3x-1=\dfrac{5}{7}$

$3x=\dfrac{5}{7}-1=\dfrac{5-7}{7}=-\dfrac{2}{7}$ soit

$x=\dfrac{-\dfrac{2}{7}}{3}=-\dfrac{2}{7\times3}=-\dfrac{2}{21}$

L'antécédent de $\dfrac{5}{7}$ est $-\dfrac{2}{21}$

Activités

p. 98-99

1 Découvrir les identités remarquables

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif** : Il s'agit de découvrir les deux identités remarquables qui n'ont pas encore été vues au collège en pratiquant le triptyque expérimenter/conjecturer/prouver.

A. Expérimenter

1.a) 3 et 7, par exemple.

b)

	Nombre	Carré de ce nombre
Choix 1	3	9
Choix 2	7	49
Somme des deux	10	58

2. Le carré de la somme de deux nombres est 100 et la somme des carrés de deux nombres est 58.

Ils ne sont pas égaux : leur différence vaut 42.

On reconnait 2×21 soit $2\times3\times7$.

B. S'aider d'un schéma

1. Aire de :

- ABCD : $\text{côté}\times\text{côté}=(a+b)^2$
- EBFI : $\text{côté}\times\text{côté}=b^2$
- HIGD : $\text{côté}\times\text{côté}=a^2$
- AEIH : $\text{Longueur}\times\text{largeur}=b\times a$
- IFCG : $\text{Longueur}\times\text{largeur}=b\times a$

2. En considérant que le puzzle est un grand carré constitué de deux petits carrés et de deux rectangles, on peut écrire cette relation concernant leurs aires :

$(a+b)^2=a^2+b^2+b\times a+b\times a.$

$(a+b)^2$ et a^2+b^2 ne sont pas égaux :

leur différence vaut $2\times a\times b$.

▶ **C. Prouver**

1. $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$

$=a\times a+a\times b+b\times a+b\times b$

$=a^2+2\times a\times b+b^2$

2. $(a-b)^2=(a-b)(a-b)$

$=a\times a+a\times(-b)-b\times a-b\times(-b)$

$=a^2-2\times a\times b+b^2$

2 Résoudre algébriquement un problème avec une équation

- **Durée estimée :** 20min
- **Objectif :** Il s'agit là encore de faire expérimenter/conjecturer/prouver

Il s'agit de laisser l'élève libre dans ces recherches. Il y a donc de nombreuses corrections possibles et admissibles suivant les compétences que chaque enseignant souhaitera faire travailler à ses élèves. Nous présentons ici uniquement la solution experte avec la résolution d'équations.

Programme de Jamal	
▶Choisir un nombre.	x
▶Calculer son double.	2x
▶Soustraire 5	2x-5

Programme de Lucile	
▶ Choisir un nombre.	x
▶ Calculer son triple.	3x
▶ Additionner 1	3x+1

1. Pour choisir le même nombre et obtenir le même résultat :

$2x-5=3x+1$

$2x-3x=1+5$

$-x=6$

$x=-6$

Le nombre à choisir est -6.

2. Pour choisir le même nombre et que le produit de leurs résultats soit nul :

$(2x-5)(3x+1)=0$

$2x-5=0$ ou $3x+1=0$

$x=\frac{5}{2}$ ou $x=-\frac{1}{3}$

Deux nombres peuvent être choisis : $\frac{5}{2}$ et $-\frac{1}{3}$.

3. Pour choisir le même nombre et que les résultats de leurs programmes aient le même carré :

- Deux nombres égaux ont le même carré ; le nombre trouvé au 1. convient donc.
- Deux nombres opposés ont aussi le même carré :

$2x-5=-(3x+1)$

$\Leftrightarrow 2x-5=-3x-1$

$\Leftrightarrow 2x+3x=-1+5$

$\Leftrightarrow 5x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{5}$ Les nombres -6 et $\frac{4}{5}$ permettent d'obtenir le résultat souhaité.

3 Bien débuter un calcul littéral

- **Durée estimée :** 25min
- **Objectif :** Au travers d'une expérimentation au tableur, il s'agit de réactiver les techniques opératoires sur les fractions vues au collège.

▶ **A. Explorer les possibles**

1.

	A	B	C	D	E
1	x	A	B	C	D
2	-10	1,833	0,568	4,333	0,192
3	-9	2,000	0,559	4,600	0,167
4	-8	2,250	0,548	5,000	0,136
5	-7	2,667	0,536	5,667	0,100
6	-6	3,500	0,520	7,000	0,056
7	-5	6,000	0,500	11,000	0,000
8	-4	#DIV/0!	0,474	#DIV/0!	-0,071
9	-3	-4,000	0,438	-5,000	-0,167
10	-2	-1,500	0,385	-1,000	-0,300
11	-1	-0,667	0,300	0,333	-0,500
12	0	-0,250	0,143	1,000	-0,833
13	1	0,000	-0,250	1,400	-1,500
14	2	0,167	-3,000	1,667	-3,500
15	3	0,286	2,500	1,857	#DIV/0!
16	4	0,375	1,400	2,000	4,500
17	5	0,444	1,125	2,111	2,500
18	6	0,500	1,000	2,200	1,833
19	7	0,545	0,929	2,273	1,500
20	8	0,583	0,882	2,333	1,300
21	9	0,615	0,850	2,385	1,167
22	10	0,643	0,826	2,429	1,071

2. a) Il semble que le tableur refuse de calculer l'expression quand le dénominateur est nul.

b) Le dénominateur de A est $x+4$. Il s'annule pour $x=-4$. Cela correspond à la cellule B8 du tableur.

Le dénominateur de B est $3x-7$. Il s'annule pour $x=\frac{7}{3}$. Cette valeur n'a pas été utilisée dans le tableur, B a donc pu être calculer pour toutes les valeurs proposées.

▶ B. Appliquer des règles de calculs connues

1. $A+C=\frac{x-1}{x+4}+\frac{3x+4}{x+4}$

Pour $x\neq-4$, $A+C=\frac{x-1+3x+4}{x+4}=\frac{4x-3}{x+4}$

2. a) Un dénominateur commun possible est le produit des deux dénominateurs.

b) Pour $x\neq-4$ et $x\neq\frac{7}{3}$,

$A=\frac{(x-1)(3x-7)}{(x+4)(3x-7)}$ et $B=\frac{(2x-1)(x+4)}{(3x-7)(x+4)}$

c) $A-B=\frac{(x-1)(3x-7)}{(x+4)(3x-7)}-\frac{(2x-1)(x+4)}{(3x-7)(x+4)}$

$=\frac{(x-1)(3x-7)-(2x-1)(x+4)}{(3x-7)(x+4)}$

$=\frac{3x^2-7x-3x+7-(2x^2+8x-x-4)}{(3x-7)(x+4)}$

$=\frac{x^2-17x+11}{(3x-7)(x+4)}$

d) $B+D=\frac{2x-1}{3x-7}+\frac{x+5}{2x-6}$

$=\frac{(2x-1)(2x-6)}{(3x-7)(2x-6)}+\frac{(x+5)(3x-7)}{(2x-6)(3x-7)}$

$=\frac{4x^2-14x+6+3x^2+8x-35}{(3x-7)(2x-6)}$

$=\frac{7x^2-6x-29}{(3x-7)(2x-6)}$

$A-C+D=\frac{x-1}{x+4}-\frac{3x+4}{x+4}+\frac{x+5}{2x-6}$

$=\frac{-3x^2+11x+50}{(x+4)(2x-6)}$

4 Résoudre une équation quotient

• **Durée estimée :** 25 min

• **Objectif :** à travers une expérimentation au tableur, il s'agit de faire découvrir un nouveau type d'équation et d'engager les manipulations techniques liées au calcul fractionnaire littéral.

▶ A. Équation quotient nul

1.

x	–10	–9	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
2*x*+14	–6	–4	–2	0	2	4	6	7	10	12	14
***x*–3**	–13	–12	–11	–10	–9	–8	–7	–6	–5	–4	–3
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2*x*+14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	
***x*–3**	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	

2. $x-3=0$ pour $x=3$. Pour utiliser l'expression $\frac{2x+14}{x-3}$, il faut que $x\neq3$.

3. $\frac{2x+14}{x-3}=0$ pour $x=-7$.

4. « Les valeurs qui annulent un quotient sont les valeurs qui annulent son numérateur ».

▶ B. Équation quotient non nul

1. Pour $x\neq3$, $\frac{6x+2}{x-3}-4=\frac{6x+2-4(x-3)}{x-3}$

$=\frac{6x+2-4x+12}{x-3}=\frac{2x+14}{x-3}$

2. Pour $x\neq3$, $\frac{6x+2}{x-3}=4\Leftrightarrow\frac{6x+2}{x-3}-4=0$

$\Leftrightarrow\frac{2x+14}{x-3}=0\Leftrightarrow2x+14=0\Leftrightarrow x=-7$

La solution de cette équation est -7.

3. Pour $x \neq 3$,

$6x+2=4(x-3) \Leftrightarrow \dfrac{6x+2}{x-3}=\dfrac{4(x-3)}{x-3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{6x+2}{x-3}=4$

4. a) $\dfrac{3x+9}{4x-1}=0$

b) $\dfrac{4x-5}{2x-3}=7$

Valeur interdite : $2x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{3}{2}$

Pour $x \neq \dfrac{3}{2}$,

$\dfrac{4x-5}{2x-3}=7 \Leftrightarrow 4x-5=7(2x-3)$

$\Leftrightarrow 4x-5=14x-21$

$\Leftrightarrow 10x=16$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{16}{10}=\dfrac{8}{5}$

La solution de cette équation est $\dfrac{8}{5}$.

c) $\dfrac{8x+12}{3x+4}=2x$

Valeur interdite : $3x+4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{4}{3}$

Pour $x \neq -\dfrac{4}{3}$,

$\dfrac{8x+12}{3x+4}=2x \Leftrightarrow 8x+12=2x(3x+4)$

$\Leftrightarrow 8x+12=6x^2+8x$

$\Leftrightarrow 6x^2=12 \Leftrightarrow x^2=2$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

Les solutions de cette équation sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$

d) **Attention,** dans l'énoncé, il faut lire

$\dfrac{2x+5}{x^2-4}=-1$

Valeurs interdites :

$x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ et } x \neq -2$

Pour $x \neq 2 \text{ et } x \neq -2$,

$\dfrac{2x+5}{x^2-4}=-1 \Leftrightarrow 2x+5=-(x^2-4)$

$\Leftrightarrow 2x+5=-x^2+4 \Leftrightarrow x^2+2x+1=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2=0 \quad \Leftrightarrow x=-1$

La solution de cette équation est -1

Valeur interdite : $4x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{4}$

Pour $x \neq \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{3x+9}{4x-1}=0 \Leftrightarrow 3x+9=0$

$\Leftrightarrow x=-3.$

La solution de cette équation est -3.

Exercices résolus

À vous de jouer

p. 101

1 a) $2x^2+17x+35$

b) $4x^2-12x+9$

c) x^2-4x+4

d) $-x^2+6x-5$

2 a) $12x^2+4x$ **b)** x^2-81

c) $25t^2-30t+9$ **d)** $2x^2-12x+18$

3 a) $-4x(x+2)$

b) $(t+5)^2$

c) $(7+2x)(7-2x)$

4 a) $(x-8)^2$

b) $(a+11)^2$

c) $7x(x-3)$

5 L'ensemble des solutions est :

$\mathcal{S}=\left\{\dfrac{9}{4};\dfrac{1}{3}\right\}$

6 L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

7 Pour $x \neq -2$,

$\dfrac{x+3}{3(x+2)}$

8 Pour $x \neq -1$ et $x \neq -\dfrac{5}{2}$,

$\dfrac{-x+2}{(x+1)(2x+5)}$

9 a) L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{5}{4}\right\}$

b) L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\frac{17}{4}\right\}$

10 a) L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\frac{31}{34}\right\}$

b) L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{-\frac{31}{10}\right\}$

Exercices résolution de problèmes

p.106

11 Il semblerait que $f(x)-g(x)=1$.

Pour $x\neq-1$:

$$f(x)-g(x)=\frac{x}{x+1}-3+\frac{4+3x}{x+1}$$

$$=\frac{x-3(x+1)+4+3x}{x+1}$$

$$=\frac{x-3x-3+4+3x}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}=1$$

12 $1+3=4=2^2$

$1+3+5=9=3^2$

$1+3+5+7=16=4^2$

Il semblerait que la somme des n premiers entiers impairs soit égale à n^2 .

13 1. a) $48^2-47^2-46^2+45^2=4$

b) $82^2-81^2-80^2+79^2=4$

c) $166^2-165^2-164^2+163^2=4$

2. Il semblerait que cette suite d'opérations donne 4 quel que soit le le nombre de départ.

3. On choisit un nombre x.

La suite d'opération revient à :

$x^2-(x-1)^2-(x-2)^2+(x-3)^2$

Avec les identités remarquables, on obtient :

$(x+x-1)(x-x+1)+(x-3+x-2)(x-3-x+2)$

Soit $(2x-1)\times1+(2x-5)\times(-1)$

Soit $2x-1-2x+5$

D'où le résultat attendu qui vaut 4.

Exercices automatismes

p. 108

Rituel 1

14 13,5

15 4,6

16 9,43

17 6,002 5

18 a) $A=-1$ **b)** $A=-3$ **c)** $A=9$

Rituel 2

19 1

20 25,8

21 • $A=0{,}75$ • $B\approx0{,}33$ • $C=0{,}8$

22 a) 0 **b)** $\frac{8}{5}$

23 a) -60 **b)** 0 **c)** -60

Rituel 3

24 $\frac{23}{20}$

25 $\frac{8}{15}$

26 $\frac{12}{5}$

27 $\mathcal{S}=\{-2\}$

28 $\mathcal{S}=\left\{-\frac{5}{6}\right\}$

Rituel 4

29 Cela représente 21 élèves.

30 Il y a 35 élèves dans cette autre classe.

31 • $A=\frac{1}{2}$ • $B=\frac{8}{5}$ • $C=\frac{1}{4}$

32 $\mathcal{S}=\{-2\}$

33 $\mathcal{S}=\left\{\frac{7}{9}\right\}$

Exercices d'entraînement p. 108-114

Je consolide mes acquis

34 Réduire une expression...ou pas

a) $6x$
b) Ne se réduit pas.
c) Ne se réduit pas.
d) $\frac{22}{5}x$
e) $6x^3$
f) $5x$
g) $-8x$
h) $-7y$
i) Ne se réduit pas.

35 Réduire une expression

a) $5x^2+21x-4$
b) $9x^2+8x+8$
c) $x^2-15x+3$
d) $4x^2-x+4$
e) $-12x^2+68x-40$
f) $20x^5-3$

36 Supprimer des parenthèses

$A=5x+5$
$B=-2x+3$
$C=3x+5y-7$
$D=-8x+3$
$E=3x+2$
$F=11x-6$
$G=20x-1$

37 Résoudre $ax+b=0$

a) $\mathcal{S}=\{4\}$
b) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{4}{5}\right\}$
c) $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{2}\right\}$
d) $\mathcal{S}=\left\{\frac{7}{3}\right\}$
e) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$
f) $\mathcal{S}=\{2\}$

38 Résoudre $x^2=k$

a) $\mathcal{S}=\{8;-8\}$
b) $\mathcal{S}=\varnothing$
c) $\mathcal{S}=\{-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\}$
d) $\mathcal{S}=\{7;-7\}$
e) $\mathcal{S}=\varnothing$
f) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right\}$

39 Reconnaître $x^2=k$

a) $\mathcal{S}=\left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2};\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$
b) $\mathcal{S}=\varnothing$
c) $\mathcal{S}=\left\{\frac{4-\sqrt{7}}{11};\frac{4+\sqrt{7}}{11}\right\}$
d) $\mathcal{S}=\left\{\frac{-10+3\sqrt{5}}{15};\frac{-10-3\sqrt{5}}{15}\right\}$

40 Résoudre $\frac{1}{x}=k$

a) $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{2}\right\}$
b) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$
c) $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{9}\right\}$
d) $\mathcal{S}=\varnothing$
e) $\mathcal{S}=\{3\}$
f) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{4}\right\}$

41 Reconnaître $\frac{1}{x}=k$

a) $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{8}\right\}$
b) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{17}{5}\right\}$
c) $\mathcal{S}=\left\{\frac{17}{10}\right\}$
d) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{16}{9}\right\}$
e) $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{4}\right\}$

f) $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{14}\right\}$

42 Résoudre *ax+b=cx+d*

a) $\mathcal{S}=\{4\}$

b) $\mathcal{S}=\{1\}$

c) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

d) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

e) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{6}{7}\right\}$

43 Reconnaître *ax+b=cx+d*

a) $\mathcal{S}=\left\{\frac{11}{5}\right\}$

b) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{11}{2}\right\}$

c) $\mathcal{S}=\left\{\frac{19}{7}\right\}$

d) $\mathcal{S}=\left\{\frac{48}{61}\right\}$

44 Utiliser un programme de calcul

Nombre choisi	4	0	2	-2	x
Je multiplie par 3	12	0	6	-6	$3x$
J'ajoute 5	17	5	11	1	$3x+5$

a) La première colonne du tableau confirme que choisir 4 affiche : « Le résultat est : 17 ».
b) Choisir 0 affiche : « Le résultat est : 5 ».
Choisir 2 affiche : « Le résultat est : 11 ».
Choisir -2 affiche « Le résultat est : 1 ».
c) On appelle x le nombre à choisir pour afficher « Le résultat est : 2 ». x est solution de l'équation $3x+5=2$ soit $x=-1$

Questions de cours

45 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

46 Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

47 Une valeur interdite est une valeur de l'inconnue qui annule un dénominateur littéral car la division par zéro n'existe pas.

48 Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur est non nul.

49 $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\Leftrightarrow A\times D=C\times B$ avec $B\neq 0$, $D\neq 0$

Développement d'expressions

50 **a)** $2x+10$
b) $6x-12$
c) $-20x-4$
d) $-6x+14$

51 **a)** $3x^2+12x$
b) $6x^2-8x$
c) $-5x^2-10x$
d) $-6x^4+3x^2$
e) $-70x^2-145x-60$
f) $-36x^2+18x-2$

52 **a)** $3x^2+7x+2$
b) x^3-2x^2+x-2
c) $-6x^2-23x-20$
d) $3a^2-7a^2b+2b^2$

53 **a)** $90x^2+175x+60$
b) $36x^2+6x-2$
c) $105x^2-87x+18$
d) $24x^2-114x+105$
e) $-48x^2-26x+90$
f) $-56x^2+210x-189$

54 **a)** $x^2+2x+12$
b) $3x^2+5x$
c) $-3t^2+26t+22$
d) $2x^3+15x^2-2x$

55 **a)** $6x^2+37x+29$
b) $2x^2-33x-75$
c) $-38x^2+143x+252$
d) $-10x^2+154x-152$

56 **a)** $x^2+22x+121$
b) $4x^2-20x+25$
c) $49-14x+x^2$
d) $16a^2+72a+81$

57 **a)** x^2-25 **b)** $16x^2-1$
c) $4y^2-9$ **d)** $36b^2-49$

58 **a)** $16x^2-72x+81$
b) $36x^2-64$
c) x^2-49
d) $25x^2+70x+49$

59 **a)** $x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$
b) $4x^2-2x+\frac{1}{4}$
c) $x^2-2x\sqrt{7}+7$
d) $9x^2+6x\sqrt{15}+15$

60 **a)** $x^2-\frac{9}{25}$
b) $\frac{25}{16}x^2-\frac{4}{49}$
c) $9x^2-5$
d) $4x^2-8$

61 **a)** $4x^2-5$
b) $x^2+x\sqrt{3}+\frac{3}{4}$
c) $9x^2-2x\sqrt{3}+\frac{1}{3}$
d) $25x^2-\frac{7}{4}$

62 **a)** $3+2\sqrt{2}$
b) $11-6\sqrt{2}$
c) $24+16\sqrt{2}$
d) 14
e) $5+4\sqrt{2}$
f) $46-34\sqrt{2}$

63 **a)** $x^2+12x+4$
b) $16x^2-48x+36$
c) $3t^2-12t+13$
d) $-2x^2-12x-25$

64 **a)** $2x^2+6x-19$
b) $x^2-76x+38$
c) $-2x^2+11x-5$
d) $-26x^2-17x+20$

65 $\mathrm{A}=(2t-4)^2+12$
$\mathrm{A}=(2(t-2))^2+12$
$\mathrm{A}=2^2(t-2)^2+12$
$\mathrm{A}=4(t-2)^2+12=\mathrm{B}$
$\mathrm{A}=(2t-4)^2+12$
$\mathrm{A}=4t^2-16t+16+12$
$\mathrm{A}=4t^2-16t+28$
$\mathrm{C}=4(t-3)(t-1)+16$
$\mathrm{C}=4(t^2-t-3t+3)+16$
$\mathrm{C}=4(t^2-4t+3)+16$
$\mathrm{C}=4t^2-16t+12+16$
$\mathrm{C}=4t^2-16t+28=\mathrm{A}$

Factorisation d'expressions

66 **a)** $3(x-9)$ **b)** $4(2x-3)$
c) $5(2x^2-3x+4)$ **d)** $2(2x-3y)$

67 **a)** $-5a$
b) $x(5x-7)$
c) $x(2x^2-5x+8)$
d) $3a(a-8)$
e) $3x^2(2x+3)$
f) $(4+x)\sqrt{x}$

68 **a)** $(2x-3)(22x-3)+(2x-3)(-24x+5)$
$=-2(2x-3)(x-1)$
b) $(15x+7)(5-x)+(12x+3)(15x+7)$
$=(15x+7)(11x+8)$
c) $(7x-24)(11x+8)+(7x-24)(12x+4)$
$=(7x-24)(23x+12)$

69 **a)** $(3x-11)(3x-4)-(5x+4)(3x-11)$
$=-2(3x-11)(x+4)$
b) $(14t+5)(-5t+2)-(8t-15)(14t+5)$
$=(14t+5)(-13t+17)$
c) $(15x-2)(3x-7)-(15x-2)(-2x-1)$
$=(15x-2)(5x-6)$

70 **a)** $(x+13)^2=x^2+26x+169$
b) $(x+7)(x\text{-}7)=x^2-49$
c) $x^2+18x+81=(x+9)^2$

71 **a)** $(x+3)^2$
b) $(x-9)^2$
c) $(3y+2)^2$
d) $(2x-5)^2$

72 **a)** $(x+12)(x-12)$
b) $(9+x)(9-x)$
c) $(3x+5)(3x-5)$
d) $(11+7t)(11-7t)$

73 **a)** $(x+7)(x-7)$
b) $(x+6)^2$
c) $(3x-11)^2$
d) $(5+8x)(5-8x)$

74 **a)** $(x-14)^2$
b) $(11x+5)^2$
c) $(10+7y)(10-7y)$
d) $\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{5}\right)$
e) $(12-7x)^2$
f) Attention, dans l'énoncé il faut lire
100 +81 b^2+180 b .
On obtient $(10+8b)^2$

75 **a)** $(5x+1)(-x+1)$ **b)** $(4t-3)^2$
c) $(13x-1)^2$ **d)** $(x+5)(x+1)$

76 **a)** $3(5x+2)(x-2)$
b) $(8t+3)(8t-3)$
c) $(3x+5)^2$
d) $(2x-3)(4x+1)$

77 **a)** $(x-4)^2-36=(x-4)^2-6^2$
$=(x-4+6)(x-4-6)=(x+2)(x-10)$
b) $y^2-5=y^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(y+\sqrt{5}\right)\left(y-\sqrt{5}\right)$
c) $25-(2-x)^2=5^2-(2-x)^2$
$=(5+2-x)(5-2+x)=(7-x)(3+x)$
d) $(x+3)^2-(2x+4)^2$
$=(x+3+2x+4)(x+3-2x-4)$
$=(3x+7)(-x-1)$

78 **a)** $2(x+3)^2$
b) $20(5+2x)(5-2x)$
c) $3(5x-7)^2$
d) $7(2x-9)^2$

79 **a)** $4(2x-3)(5x+12)$
b) $2(3x-7)(x+1)$
c) $-6(5x+1)(x-2)$
d) $-5(2x-3)(2x+1))$

80 **1.** $(x+1)^2-(x-1)^2$
$=(x+1+x-1)(x+1-x+1)$
$=2\times 2x=4x$

2. 10001^2-9999^2
$=(10000+1)^2-(10000-1)^2$
$=4\times 10\ 000$
$=40\ 000.$

Résolution d'équation produit nul

81 **a)** $\mathcal{S}=\{-3;5\}$

b) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{2}{3};\frac{4}{5}\right\}$

c) $\mathcal{S}=\left\{0;\frac{4}{5}\right\}$

d) $\mathcal{S}=\{0;3\}$

e) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{3};5\right\}$

82 **a)** $x(6x-5)=0$ donc $\mathcal{S}=\left\{0\,;\frac{5}{6}\right\}$

b) $4(2x+1)=0$ donc $\mathcal{S}=\{-1\}$

c) $6(x+5)=0$ donc $\mathcal{S}=\{-5\}$

d) $-3(x-5)(2x+1)=0$ donc $\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{2};5\right\}$

83 **a)** $\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{2};9\right\}$ **b)** $\mathcal{S}=\left\{-10\,;\frac{5}{4}\right\}$

c) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{11}{5};\frac{2}{5}\right\}$ **d)** $\mathcal{S}=\left\{\frac{4}{7};\frac{1}{8}\right\}$

84 **a)** $\mathcal{S}=\{1\}$

b) $\mathcal{S}=\left\{\frac{7}{6}\right\}$

c) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{5}{8}\right\}$

d) $\mathcal{S}=\left\{\frac{7}{12}\right\}$

85 **a)** $\mathcal{S}=\{-3\}$

b) $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{6}\right\}$

c) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right\}$

d) $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{4};5\right\}$

e) $\mathcal{S}=\{-8;12\}$

86

```
import math
k=int(input("Proposer une valeur pour k : "))
if k < 0 :
    print("x^2 =",k," n'a pas de solution réelle")
else :
    if k==0 :
        print("x^2=0 a une solution : 0")
    else :
        sol1=math.sqrt(k)
        print("x^2 =",k," a deux solutions : ",sol1," et -",sol1)
```

87 **a)** $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right\}$

b) $\mathcal{S}=\varnothing$

c) $\mathcal{S}=\left\{-2;-\frac{5}{2}\right\}$

d) $\mathcal{S}=\left\{\frac{-7+\sqrt{2}}{2};\frac{-7-\sqrt{2}}{2}\right\}$

88 **a)** $\mathcal{S}=\varnothing$

b) $\mathcal{S}=\left\{\frac{3+\sqrt{11}}{11};\frac{3-\sqrt{11}}{11}\right\}$

c) $\mathcal{S}=\left\{-1;\frac{9}{5}\right\}$ **d)** $\mathcal{S}=\left\{\frac{5+\sqrt{3}}{3};\frac{5-\sqrt{3}}{3}\right\}$

89 **1.** $\mathrm{A}=(x+1)^2-(x+1)(2x+3)$

$=x^2+2x+1-2x^2-3x-2x-3$

$=-x^2-3x-2$

2. $\mathrm{A}=(x+1)(x+1-2x-3)$

$\mathrm{A}=(x+1)(-x-2)$

3. a) $\mathrm{A}=0$

$x+1=0$ ou $-x-2=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=-2$

$\mathcal{S}=\{-1;-2\}$

b) $\mathrm{A}=-2$

$\Leftrightarrow -x^2-3x=0 \quad \Leftrightarrow -x^2-3x=0$

$\Leftrightarrow x(x+3)=0 \quad \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-3$

$\mathcal{S}=\{0;-3\}$

90 **1.** $B=(3x-1)^2-4x(3x-1)$

$B=9x^2-6x+1-12x^2+4x$

$B=-3x^2-2x+1$

2. a) Pour $x=0$, $B=1$

b) Pour $x=\sqrt{2}$, $B=-5-2\sqrt{2}$

3. $B=(3x-1)(3x-1-4x)$

$B=(3x-1)(-x-1)$

4. a) $B=0 \Leftrightarrow 3x-1=0$ ou $-x-1=0$

$\mathcal{S}=\left\{-1;\frac{1}{3}\right\}$

b) $B=1 \Leftrightarrow -3x^2-2x=0$

$\Leftrightarrow -x(3x+2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-\frac{2}{3}$

$\mathcal{S}=\left\{0\,;-\frac{2}{3}\right\}$

Simplification d'expressions fractionnaires

91 **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{5}{2}$ et $-\frac{2}{3}$

c) -2 et 2 **d)** 0

92 **a)** $x+15$

b) $\frac{x}{15}$

c) $3x^2+2x-4$

d) $\frac{1}{2x}$

93 **a)** Valeur interdite : 1

$\frac{2x}{x-1}+4=\frac{2x+4(x-1)}{x-1}=\frac{6x-4}{x-1}$

b) Valeur interdite : $\frac{3}{2}$

$\frac{x}{2x-3}+5=\frac{x+5(2x-3)}{2x-3}=\frac{11x-15}{2x-3}$

c) Pas de valeur interdite.

$3-\frac{4}{x^2+2}=\frac{3(x^2+2)-4}{x^2+2}=\frac{3x^2+6-4}{x^2+2}=\frac{3x^2+2}{x^2+2}$

d) Valeur interdite : 2.

$\frac{3x-2}{x-2}-\frac{2}{3}=\frac{3(3x-2)-2(x-2)}{3(x-2)}$

$=\frac{7x-2}{3(x-2)}$

94 **a)** Valeur interdite : 0.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}=\frac{3}{2x}$

b) Valeur interdite : -5.

$\frac{5x}{x+5}+3x+2$

$=\frac{5x+(3x+2)(x+5)}{x+5}$

$=\frac{5x+3x^2+15x+2x+10}{x+5}$

$=\frac{3x^2+22x+10}{x+5}$

c) Pas de valeur interdite.

$\frac{x(x+2)}{x^2+1}-9=\frac{x^2+2x-9(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{-8x^2+2x-9}{x^2+1}$

d) Valeurs interdites : 4 et 0

$\frac{3}{x-4}+\frac{2}{x}=\frac{3x+2(x-4)}{x(x-4)}=\frac{5x-8}{x(x-4)}$

95 **a)** Valeur interdite : -2.

$\frac{3(x+2)}{x+2}=3$

b) Valeurs interdites : -5 et 3

$\frac{4x(x+5)}{(x+5)(3-x)}=\frac{4x}{3-x}$

c) Pas de valeur interdite.

$\frac{9x+6}{3}=3x+2$

d) Valeur interdite : 0.

$\frac{4t^2+5t}{t}=4t+5$

96 **a)** Valeurs interdites: 3 et 0

$\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x}=\frac{x-2(x-3)}{x(x-3)}=\frac{-x+6}{x(x-3)}$

b) Valeurs interdites : 2 et -1.

$\frac{2}{x-2}-\frac{4}{x+1}=\frac{2(x+1)-4(x-2)}{(x-2)(x+1)}$

$=\frac{-2x+10}{(x-2)(x+1)}$

c) Valeurs interdites : $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{2}$

$\frac{3x+3}{3x-1}+\frac{2x}{2x+1}$

$=\frac{(3x+3)(2x+1)+2x(3x-1)}{(3x-1)(2x+1)}$

$=\frac{6x^2+3x+6x+3+6x^2-2x}{(3x-1)(2x+1)}$

$=\frac{12x^2+7x+3}{(3x-1)(2x+1)}$

97 **a)** Valeurs interdites : $-\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$

$\frac{3}{2x+1}+\frac{5}{3x-2}=\frac{3(3x-2)+5(2x+1)}{(2x+1)(3x-2)}$

$=\frac{9x-6+10x+5}{(2x+1)(3x-2)}=\frac{19x-1}{(2x+1)(3x-2)}$

b) Valeurs interdites : $-\frac{1}{3}$ et $-\frac{7}{5}$

$\frac{4}{6x+2}-\frac{3}{5x+7}=\frac{4(5x+7)-3(6x+2)}{(6x+2)(5x+7)}$

$=\frac{20x+28-18x-6}{(6x+2)(5x+7)}=\frac{2x+22}{(6x+2)(5x+7)}$

$=\frac{x+11}{(3x+1)(5x+7)}$

c) Valeurs interdites : $\frac{5}{3}$ et $\frac{1}{2}$

$\frac{8}{3x-5}-\frac{7}{2x-1}=\frac{8(2x-1)-7(3x-5)}{(3x-5)(2x-1)}$

$=\frac{16x-8-21x+35}{(3x-5)(2x-1)}=\frac{-5x+27}{(3x-5)(2x-1)}$

98 **a)** Valeur interdite : 0

$\frac{2x+5}{2x}+\frac{2x+5}{5}=\frac{5(2x+5)+2x(2x+5)}{2x\times 5}$

$=\frac{(2x+5)^2}{10x}$

b) Valeurs interdites : $-\frac{3}{2}$ et $\frac{4}{3}$

$\frac{4x+5}{2x+3}-\frac{3x+7}{3x-4}$

$=\frac{(4x+5)(3x-4)-(3x+7)(2x+3)}{(2x+3)(3x-4)}$

$=\frac{6x^2-24x-41}{(2x+3)(3x-4)}$

c) Valeurs interdites : $-\frac{4}{3}$ et $\frac{2}{5}$

$\frac{5x-2}{3x+4}-\frac{3x+4}{5x-2}=\frac{(5x-2)^2-(3x+4)^2}{(3x+4)(5x-2)}$

$=\frac{(8x+2)(2x-6)}{(3x+4)(5x-2)}=\frac{4(4x+1)(x-3)}{(3x+4)(5x-2)}$

Résolution d'équation quotient

99 **a)** Valeur interdite: -4, $\mathcal{S}=\{3\}$

b) Valeur interdite : -4, $\mathcal{S}=\left\{\frac{5}{2}\right\}$

c) Valeur interdite : 7, $\mathcal{S}=\{7\}$

d) Valeur interdite : $-\frac{2}{5}$, $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

100 **a)** Valeur interdite : -8, $\mathcal{S}=\left\{\frac{9}{2}\right\}$

b) Valeur interdite : $-\frac{3}{2}$, $\mathcal{S}=\left\{-\frac{11}{8}\right\}$

c) Valeur interdite : 5, $\mathcal{S}=\{2\}$

d) Valeur interdite : -1, $\mathcal{S}=\{2\}$

e) Valeurs interdites : $-\frac{4}{3}$ et $\frac{1}{7}$, $\mathcal{S}=\left\{-\frac{34}{41}\right\}$

f) Valeurs interdites : $-\frac{5}{2}$ et $\frac{1}{4}$, $\mathcal{S}=\left\{\frac{41}{10}\right\}$

101 **a)** Valeur interdite : 1, $\mathcal{S}=\left\{\frac{15}{16}\right\}$

b) Valeur interdite : 4, $\mathcal{S}=\{16\}$

c) Valeur interdite : 2, $\mathcal{S}=\left\{\frac{7}{6}\right\}$

d) Valeur interdite : -1, $\mathcal{S}=\{1\}$

102 **a)** Valeur interdite : -9, $\mathcal{S}=\left\{\frac{2}{3};5\right\}$

b) Valeur interdite : 4, $\mathcal{S}=\{-6;6\}$

c) Valeur interdite : $-\frac{5}{6}$ et $\frac{3}{4}$, $\mathcal{S}=\{1\}$

d) Valeur interdite : 7 et $-\frac{3}{2}$, $\mathcal{S}=\left\{\frac{41}{52}\right\}$

e) Valeur interdites : -4 et -1,

$\mathcal{S}=\left\{-\sqrt{\frac{5}{2}};\sqrt{\frac{5}{2}}\right\}$

103

```
k=int(input("Proposer une valeur pour k : "))
if k == 0 :
    print("1/x =",k," n'a pas de solution")
else :
    if k<0 :
        print("1/x =",k," a une solution : - 1 /",abs(k))
    else :
        if k==1 :
            print("1/x = 1 a une solution : 1")
        else :
            print("1/x =",k," a une solution : 1 /",k)
```

Relation entre les variables

104 **1.** $r=\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\pi}}$

2. $r=\frac{5}{\sqrt{\pi}}$

$r\approx 2{,}8\,\text{cm}$

105 **1.** $\mathcal{V}=L\times\ell\times h$

$h=\frac{\mathcal{V}}{L\times\ell}$

2. $\mathcal{A}=2(L\ell+hL+\ell h)=2L\ell+2h(L+\ell)$

$h=\frac{\mathcal{A}-2L\ell}{2(L+\ell)}$

106 **1.** $t=\frac{d}{v}$

2. $t=\frac{15\,000}{7}$

$t\approx 2\,142\,\text{s}$ soit environ 36 min.

107 **1.** $I=\frac{U}{R}$

2. $R=\frac{U}{I}=\frac{4}{0{,}16}$ $R=25\,\Omega$

108 **1.** Si l'intensité appliquée est doublée alors la puissance est quadruple.

2. $I=\sqrt{\frac{P}{R}}$

$I=\sqrt{\frac{2}{100}}$ $I\approx 0{,}14\text{ A}$

109 **1. a)** $x-1$

b) Dans le schéma, on reconnait une configuration de Thalès. On appelle d la distance mesurée entre Georges et le piquet 1.

$\frac{d}{1}=\frac{x}{x-1}$

c) Valeur interdite : 1. Cela correspondrait à un arbre 2 à l'emplacement du piquet 2.

d) $d=\frac{x}{x-1}$

2.

```
x=int(input("Donner la distance mesurée entre l'observateur et le piquet 1 en mètres : "))
if x == 1 :
    print("La distance entre l'arbre 1 et l'arbre 2 est de 1 m")
else :
    d=x/(x-1)
    print("La distance entre les deux arbres est de : ",d," m")
```

Résolution de problèmes

110 1. Au début $t=0$, $f(0)=10$

2. Si le nombre initial de bactéries vaut $f(0) = 10$ (en millions) alors le nombre de bactéries restantes si 90 % ont été éliminées correspond à $10\%f(0) = 1$ (million) On cherche donc t pour lequel $f(t)=1$ et on résout donc l'équation $\frac{10}{t+1}=1$.

-1 est valeur interdite pour cette équation mais n'appartient pas au domaine de définition.

On résout l'équation et on trouve t=9h. Au bout de 9h, il ne reste plus qu'un million de bactéries et donc 90 % d'entre-elles ont été éliminées.

111 La réciproque du théorème de Thalès donne :

$$\frac{x}{x+3}=\frac{5}{7}$$

Valeur interdite : -3, mais x est une distance donc ne peut pas être négative.

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{15}{2}\right\}$$

Les droites seront parallèles si x vaut 7,5.

112 **Esprit critique**

1. $-5t^2+1=0$

2. $\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$

3. La solution négative n'a pas de réalité physique et doit être écartée.

L'élève devra choisir entre les différentes solutions de l'équation en faisant le lien entre la modélisation et le phénomène physique réel.
On pourra faire remarquer que même si $h(t)$ n'a pas de valeur interdite, physiquement ce calcul n'est cohérent qu'avec $t>0$.

113 **Histoire des maths**

1. 3

2. $3^2=9$

3. $x^2+6x=40$

$x^2+6x+9=49$ donc $(x+3)^2=49$

$\mathcal{S}=\{4;-10\}$

4. a) $\mathcal{S}=\left\{-5+\sqrt{50};-5-\sqrt{50}\right\}$

b) $\mathcal{S}=\{-4;1\}$

c) $\mathcal{S}=\left\{-8-\sqrt{85};-8+\sqrt{85}\right\}$

114 **Esprit critique**

1. Au moment du repas $t=0$; $f(0)=1$.

2. $(0{,}7t-1{,}6)(0{,}2t-1)$

$=0{,}14t^2-0{,}7t-0{,}32t+1{,}6$

$=0{,}14t^2-1{,}02t+1{,}6$

3. On cherche t tel que $f(t)=1$ or,

$f(t)=t(0{,}7t-1{,}6)(0{,}2t-1)+1$ donc on cherche t tel que $t(0{,}7t-1{,}6)(0{,}2t-1)=0$

$\Leftrightarrow t=0$ ou $0{,}7t-1{,}6=0$ ou $0{,}2t-1=0$

$\Leftrightarrow t=0$ ou $t=2{,}28$ ou $t=5$.

La glycémie sera revenue au taux de départ au bout de 2,28 h.

L'élève devra choisir entre les différentes solutions de l'équation en faisant le lien entre la modélisation, son domaine de définition et le phénomène physique réel.

115 **Choisir le bon schéma**

1. $\mathcal{S}(x)=2x^2+4\times2x$

Or $2(x+2)^2-8=2(x^2+4x+4)-8$

$=2x^2+8$

2. $2(x+2)^2-8=72$ soit $(x+2)^2=40$

$\mathcal{S}=\left\{-2-\sqrt{40};-2+\sqrt{40}\right\}$

La première solution est négative ; elle ne convient pas. La surface extérieure sera donc de 72 pour un côté de base d'environ 4,32.

116 D'une part $\cos \text{CBA}=\cos 60^o=\frac{1}{2}$

D'autre part $\cos\hat{\text{B}}=\frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}=\frac{\text{BC}}{\text{BA}}$

Or, $\text{BA}=\text{BC}+4$ Donc $\frac{\text{BC}}{\text{BC}+4}=\frac{1}{2}$

Valeur interdite : -4, or BC est une longueur et doit être positif. $\frac{\text{BC}}{\text{BC}+4}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\text{BC}=\text{BC}+4$

soit $\text{BC}=4$ et $\text{BA}=8$. D'après le théorème de Pythagore, $\text{AC}=\sqrt{8^2-4^2}=\sqrt{48}$.

À chacun son rythme

117 Énoncé A

1. On conjecture que

$f(x)-g(x)=5$

2. $2(x^2+1)^2+3-2(x^4+2x^2)$

$=2x^4+4x^2+2+3-2x^4-4x^2=5$

Énoncé B

1. On conjecture que

$h(x)=(x-1)^2$

2. $(2x-1)^2-x(3x-2)$

$=4x^2-4x+1-3x^2+2x$

$=x^2-2x+1$

$=(x-1)^2$

Énoncé C

D'après le tableau x=9 est solution. Toutefois, c'est une équation de degré 2 avec potentiellement 2 solutions. Il convient donc de vérifier.

$(3x+2)^2=(4x-7)^2$

$3x+2=4x-7$ ou $3x+2=-4x+7$

$x=9$ ou $7x=5$

Il y a donc bien une deuxième solution $\frac{5}{7}$, non entière qui n'apparait donc pas dans le tableau.

Le premier niveau de difficulté permet à l'élève de conjecturer un résultat constant et entier.
Pour le deuxième, la conjecture porte sur une expression littérale.
Pour le troisième, on cherche à tester les automatismes de l'élève.

Exercices de synthèse p. 115

118 Identités remarquables

1. La 3^e

2. $E=25-x^2-6x-9=-x^2-6x+16$

3. $E=(5+x+3)(5-x-3)$

$=(x+8)(-x+2)$

4. **a)** $E=0$

$x+8=0$ ou $-x+2=0$

$x=-8$ ou $x=2$

$\mathcal{S}=\{-8\,;2\}$

b) Pour $E=0$, la partie hachurée disparait du schéma. Donc $x+3=5$ et on retrouve la solution 2.

119 La meilleure forme

1. $A(x)=x^2+4x+4-9$

$A(x)=x^2+4x-5$

2. $A(x)=(x+2+3)(x+2-3)$

$A(x)=(x+5)(x-1)$

3. **a)** $A(3)=(3+5)(3-1)=8\times2=16$

$A(\sqrt{3}-2)=(\sqrt{3}-2+2)^2-9$

$=3-9=-6$

b) $A(x)=0 \Leftrightarrow x+5=0$ ou $x-1=0$

$\mathcal{S}=\{-5\,;1\}$

c) $A(x)=5 \Leftrightarrow x^2+4x=0$

$\Leftrightarrow x(x+4)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x+4=0$

$\mathcal{S}=\{0\,;-4\}$

120 Identités remarquables

1. **a)** $E=x^2-2x+1+x^2+x^2+2x+1$

$=3x^2+2$

b) $E=4802$

$x^2=\frac{4800}{3}=1600$

$x=40$. Les nombres cherchés sont 39; 40 et 41.

2. **a)** $G=(2x+10)(2x-10)$

b) Cela correspond à $G=0$

soit $2x+10=0$ ou $2x-10=0$

$x=-5$ ou $x=5$.

Le nombre recherché est 5.

121 Enclos

1. $\mathcal{S}=27=L\times\ell=x(12-x)$

Soit $12x-x^2=27 \Leftrightarrow -x^2+12x-27=0$

2. $(x-3)(9-x)=9x-x^2-27+3x$

$=-x^2+12x-27$

3. $-x^2+12x-27=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(9-x)=0$

$\Leftrightarrow x-3=0$ ou $9-x=0$

$\Leftrightarrow x=3$ ou $x=9$

Les deux solutions de cette équation correspondent au même couple de dimension pour l'enclos : Longueur 9 ; largeur 3 mais avec des positionnements différents : l'un vertical et l'autre horizontal.

4. a) $36-(x-6)^2$

$=36-(x^2-12x+36)$

$=-x^2+12x$

b) $36-(x-6)^2=32 \Leftrightarrow 4-(x-6)^2=0$

c) $\Leftrightarrow (2-x+6)(2+x-6)=0$

$\Leftrightarrow (8-x)(x-4)=0$

$\Leftrightarrow 8-x=0$ ou $x-4=0 \Leftrightarrow x=8$ ou $x=4$

Les deux solutions de cette équation correspondent au même couple de dimension pour l'enclos : Longueur 8 ; largeur 4 mais avec des positionnements différents : l'un vertical et l'autre horizontal.

122 Rédiger une solution

Le tronc de cône est obtenu en découpant petit cône, réduction du grand cône.
Or, dans une réduction, les mesures sont proportionnelles aux mesures initiales.

$$\frac{\text{Hauteur réduite}}{\text{Hauteur initiale}}=\frac{\text{Rayon réduit}}{\text{Rayon initial}}$$

Si on appelle x la hauteur initiale du cône, la hauteur réduite vaut $x-4$.

On obtient alors $\frac{x-4}{x}=\frac{3}{5}$

Valeur interdite : 0

$3x=5(x-4)$

$\Leftrightarrow 3x=5x-20$

$\Leftrightarrow 2x=20$

$\Leftrightarrow x=10$

La hauteur initiale du cône était de 10.

123 Je m'abonne… ou pas

1. Si Jack va à la piscine 15 fois

• Avec abonnement, il payera 125 € (c'est-à-dire 50 € $+15\times 5$ €)

• Sans abonnement, il payera 150 € (c'est-à-dire 15×10 €)

2. a) S'il y va x fois, jack paiera avec abonnement $50+x\times 5$ soit $50+5x$.

b) Le coût moyen est donc de $\frac{50+5x}{x}$.

c) $\frac{50+5x}{x}=7$.

$\Leftrightarrow 50+5x=7x$

$\Leftrightarrow 2x=50$

$\Leftrightarrow x=25.$

Pour obtenir un coût moyen de 7 €, Jack doit aller à la piscine 25 fois.

124 Une de chaque

a) Valeur interdite : 6

$\mathcal{S}=\{9\}$

b) $\mathcal{S}=\varnothing$

c) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{8}{9}\right\}$

d) $\mathcal{S}=\{0;9;-9\}$

e) $\mathcal{S}=\left\{-4;\frac{9}{4}\right\}$

f) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$

g) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{5}{7}\right\}$

h) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{18}{11}\right\}$

Exercices d'approfondissement

p. 116

125 Solutions d'une équation produit

```
a=0
while a==0 :
    a=int(input("Proposer une valeur non nulle pour a : "))
b=int(input("Proposer une valeur pour b : "))
c=0
while c==0 :
    c=int(input("Proposer une valeur non nulle pour c : "))
d=int(input("Proposer une valeur pour d : "))
sol1=-b/a
sol2=-d/c
print("Les solutions de l'équation (",a,"x + ",b,")(",c,"x + ",d,") = 0 sont ",sol1," et ",sol2)
```

126 Un degré de plus

$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$

$=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$=a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

127 Un nombre de plus

$(a+b+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+bc$

128 Triangle particulier

1. $2(2x-4)=\sqrt{3}(5x-1)$

$\Leftrightarrow 4x-8=5\sqrt{3}-\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x(4-5\sqrt{3})=8-\sqrt{3}$

$x=\dfrac{8-\sqrt{3}}{4-5\sqrt{3}} \Leftrightarrow x\approx -1{,}34$

2. Dans le triangle EAU, la hauteur issue de partage le triangle en deux triangles rectangles. Considérons celui de sommet U.

$2x-4$ représente le côté opposé à $\hat{U}$ et $5x-1$ représente son hypoténuse.
Quand on prend pour x la solution de l'équation précédente, on peut déduire que

$\sin\hat{U}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Soit $\hat{U}=60^o$.

Et on ne peut rien dire d'autre 😉

129 Probabilité de tirage

1. On appelle x le nombre de boules jaunes.

$\dfrac{x}{x+5}=0{,}8=\dfrac{8}{10} \Leftrightarrow 10x=8x+40$

$\Leftrightarrow 2x=40 \Leftrightarrow x=20.$

Il y a 20 boules jaunes.

2. On appelle x le nombre de boules jaunes.

$\dfrac{x}{x+2x+5}=\dfrac{5}{16}$

$\Leftrightarrow 16x=15x+25$

$\Leftrightarrow x=25$

Il y a 25 boules jaunes.

130 Équation bicarrée

1. Pour $y=x^2$, l'équation devient : $y^2=36$

2. $y^2=36 \Leftrightarrow y=6$ ou $y=-6$.

Or, $y=x^2$ donc $y>0$ soit $y=6$.

3. $x^2=6 \Leftrightarrow x=\sqrt{6}$ ou $x=-\sqrt{6}$.

$\mathcal{S}=\{\sqrt{6};-\sqrt{6}\}$

4. Pour $y=x^2$, l'équation devient :

$y^2-2y+1=0$

$\Leftrightarrow (y-1)^2=0 \Leftrightarrow y-1=0 \Leftrightarrow y=1$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

$\mathcal{S}=\{1\,;-1\}$

131 Entiers impairs

1. $1=2\times 0+1=1^2-0^2$

$3=2\times 1+1=2^2-1^2$

$5=2\times 2+1=3^2-2^2$

$7=2\times 3+1=4^2-3^2$

$9=2\times 4+1=5^2-4^2$

2. Il semble que $2k+1=(k+1)^2-k^2$

Preuve : $(k+1)^2-k^2$

$=k^2+2k+1-k^2=2k+1$

132 Conjuguons

1. Valeur interdite : $-\sqrt{2}$

Pour $x\neq\sqrt{2}$,

$$\frac{2}{x+\sqrt{2}}=\frac{2(x-\sqrt{2})}{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}=\frac{2(x-\sqrt{2})}{x^2-2}$$

2. Valeur interdite : $\sqrt{5}$

Pour $x\neq-\sqrt{5}$,

$$\frac{5x}{x-\sqrt{5}}=\frac{5x(x+\sqrt{5})}{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}=\frac{5x(x+\sqrt{5})}{x^2-5}$$

133 Émettre une conjecture

1. $\left(\dfrac{k(k+1)}{2}\right)^2-\left(\dfrac{k(k-1)}{2}\right)^2$

$=\dfrac{k^2}{4}(k+1+k-1)(k+1-k+1)$

$=\dfrac{k^2}{4}\times 4k=k^3$

2. $2^3=\left(\dfrac{2(2+1)}{2}\right)^2-\left(\dfrac{2(2-1)}{2}\right)^2$

$=\left(\dfrac{2\times 3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{2\times 1}{2}\right)^2=3^2-1^2$

$1^3+2^3=1^2-0^2+3^2-1^2=3^2=(1+2)^2$

3. Il semble que :

$\mathcal{S}=1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+k^3$

$=\left(\dfrac{k(k+1)}{2}\right)^2=(1+2+3+4+\ldots+k)^2$

4. La somme des cubes des k premiers entiers est égale au carré de leur somme.

Vers la 1re

134 Vers la Spécialité Maths

Pour $x\neq 0$ et $x\neq -1$

$$\frac{g(1+x)-g(1)}{x}=\frac{\frac{1}{(x+1)^2}-1}{x}$$

$$=\frac{1-(x+1)^2}{x(x+1)^2}=\frac{1-x^2-2x-1}{x(x+1)^2}=-\frac{x+2}{(x+1)^2}$$

135 Vers STL – STI2D – STMG - ST2S

1. $\mathrm{A}(3)=4\times 3^3-27\times 3-27$

$=4\times 27-4\times 27=0$

2. a) $\mathrm{A}(x)=ax^3+bx^2+cx-3ax^2-3bx-3c$

$a=4$

$b-3a=0\Leftrightarrow b=12$

$3c=27\Leftrightarrow c=9$

b) $\mathrm{A}(x)=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(4x^2+12x+9)=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(2x+3)^2=0$

$\Leftrightarrow x-3=0$ ou $2x+3=0$

$\Leftrightarrow x=3$ ou $x=-\dfrac{3}{2}$ Donc $\mathcal{S}=\left\{3\,;-\dfrac{3}{2}\right\}$

136 Vers la filière technologique

$f(1+x)-f(1)$

$=(1+x)^2+3(x+1)+1-(1+3+1)$

$=1+2x+x^2+3x+3+1-5\ =x^2+5x$

Pour $x\neq 0$,

$$\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\frac{x^2+5x}{x}=x+5$$

137 Vers la Spécialité Maths

1. a) $x^2+4x-12=(x+2)^2-16$

b) $(x+2+4)(x+2-4)=(x+6)(x-2)$

c) $\mathcal{S}=\{2\,;-6\}$

2. a) $\mathcal{S}=\{2\,;10\}$

b)Attention dans l'énoncé il faut lire $x^2-2x-8=0$ on a $\mathcal{S}=\{-2;4\}$

Préparer le contrôle
Je me teste

p. 118

Objectif 1 Transformer une expression littérale

138 A et C

139 A

140 A

141 C

142 D

143 D

144 D

Objectif 2 Résoudre une équation produit nul

145 C

146 D

147 C

148 B

Objectif 3 Résoudre une équation quotient

149 A et C

150 B et C

151 A

Préparer le contrôle
Je m'entraîne

p. 119

Objectif 1 Transformer une expression littérale

152 **1. a)** $12x+4$

b) $8x^2+34x+35$

c) $x^2+10x+25$

d) $x^2-12x+36$

e) x^2-16

2. a) $3(7x+2)$

b) $(3x+4)(x+y^2)$

c) $(x+7)^2$

d) $(x-4)^2$

e) $(x+9)(x-9)$

3. a) Pour $x\neq 4$, $\dfrac{5x-7}{x-4}$

b) Pour $x\neq\dfrac{1}{2}$ et $x\neq\dfrac{7}{5}$, $\dfrac{23x+17}{(2x-1)(5x+7)}$

153 1. **a)** $-10x-8$
b) $15x^2-47x-10$
c) $4x^2+28x+49$
d) $16x^2-72x+81$
e) $25x^2-36$
2. **a)** $7(5x-4)$
b) Attention dans l'énoncé, il faut lire $24x^2-21$. On trouve $3(8x^2-7)$
c) $(x+4)(-3x+4)$
d) $(3x+5)^2$
e) $(6x-9)^2$
3. **a)** Pour $x\neq\frac{7}{3}, \frac{7x-39}{3x-7}$
b) Pour $x\neq-\frac{9}{2}$ et $x\neq\frac{1}{4}, -\frac{7(3x-4)}{(2x+9)(4x-1)}$

154 1. **a)** $-12x+30$ **b)** $20x^2-84x+49$
c) $-2x^2+7x+30$ **d)** $4x^2+45x-91$
2. **a)** $-8(7x-4)$
b) $(3x+1)(-2x+5)$
c) $(7x-2)(3x-4)$
3. **a)** Pour $x\neq-\frac{11}{6}, \frac{14x+38}{6x+11}$
b) Pour $x\neq\frac{5}{2}$ et $x\neq9, \frac{-32x-11}{(2x-5)(x-9)}$

Objectif 2 Résoudre une équation produit nul

155 **a)** $\mathcal{S}=\left\{\frac{7}{2};\frac{13}{8}\right\}$
b) $\mathcal{S}=\left\{\frac{23}{10}\right\}$
c) $\mathcal{S}=\{-12\}$

156 **a)** $\mathcal{S}=\left\{\frac{7}{5};\frac{15}{7}\right\}$
b) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{13}{15};\frac{13}{15}\right\}$
c) $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{13};-\frac{17}{3}\right\}$

157 **a)** $\mathcal{S}=\left\{-\frac{2}{3};\frac{7}{4}\right\}$
b) $\mathcal{S}=\{3\}$
c) $\mathcal{S}=\left\{-2;\frac{9}{2}\right\}$

Objectif 3 Résoudre une équation quotient

158 **a)** $\mathcal{S}=\left\{\frac{11}{2}\right\}$
b) $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{22}\right\}$

159 **a)** $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{4};-\frac{6}{7}\right\}$
b) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{34}{95}\right\}$

160 **a)** $-\frac{5}{3}$ est une valeur interdite donc
$\mathcal{S}=\{5\}$
b) $-\frac{7}{3}$ et $\frac{7}{3}$ sont des valeurs interdites donc
$\mathcal{S}=\varnothing$

Travaux pratiques p. 121-122

1 Organisation de révisions

• **Durée estimée :** 50 min
• **Objectif :** Entrainement à la programmation en python : instruction conditionnelle, boucle et opération sur les chaines de caractères.

▶ A. Obtenir une carte flash puis 30

1. a) `a` et `b` sont des entiers.
`expression_facto` et `expression_dev` sont des chaines de caractères.

b)

```
1  import random
2  a=random.randint(2,5)
3  b=random.randint(2,5)
4  def Affichage():
5      expression_facto="("+str(a)+"x+"+str(b)+")^2"
6      expression_dev=str(a*a)+"x^2+"+str(2*a*b)+"x+"+str(b*b)
7      print("énoncé : développe "+expression_facto)
8      print("correction : "+expression_dev)
9
10 Affichage()
```

2.

```
1  import random
2  def Affichage():
3      a=random.randint(2,5)
4      b=random.randint(2,5)
5      expression_facto="("+str(a)+"x+"+str(b)+")^2"
6      expression_dev=str(a*a)+"x^2+"+str(2*a*b)+"x+"+str(b*b)
7      print("énoncé : développe "+expression_facto)
8      print("correction : "+expression_dev)
9
10 for i in range(1,30):
11     Affichage()
```

▶ B. Pile ou Face

```
1  import random
2
3  def Affichage():
4      a=random.randint(2,5)
5      b=random.randint(2,5)
6      expression_facto="("+str(a)+"x+"+str(b)+")^2"
7      expression_dev=str(a*a)+"x^2+"+str(2*a*b)+"x+"+str(b*b)
8      pileouface=random.randint(0,1);
9      if(pileouface==0):
10         print("énoncé : Développer "+expression_facto);
11         print("correction : "+expression_dev);
12     if(pileouface==1):
13         print("énoncé : Factoriser "+expression_dev);
14         print("correction : "+expression_facto);
15
16 for i in range(1,30):
17     Affichage()
```

▶ C. Tout envisager

1. a)

Quand **a** vaut `1`, l'écriture simplifiée de `1\times  x` est `x` ; or, en lignes **6** et **7**, on aurait `1x` et `1x^2`. Donc si **a** vaut `1`, il ne faut donc pas afficher `str(a)` et `str(a*a)` en lignes **6** et `7`.

```python
import random
def Affichage():
    a=random.randint(1,5)
    b=random.randint(1,5)
    if a==1 :
        coefa =""
        coefa2=""
    else :
        coefa =str(a)
        coefa2=str(a*a)
    expression_facto="("+coefa+"x+"+str(b)+")^2"
    expression_dev=coefa2+"x^2+"+str(2*a*b)+"x+"+str(b*b)
    pileouface=random.randint(0,1);
    if(pileouface==0):
        print("énoncé : Développer "+expression_facto);
        print("correction : "+expression_dev);
    if(pileouface==1):
        print("énoncé : Factoriser "+expression_dev);
        print("correction : "+expression_facto);

for i in range(1,30):
    Affichage()
```

2.

```python
import random
def Affichage():
    a=random.randint(1,5)
    b=random.randint(1,5)
    if a==1 :
        coefa =""
        coefa2=""
    else :
        coefa=str(a)
        coefa2=str(a*a)
    choix=random.randint(0,2)
    if (choix==0):
        expression_facto="("+coefa+"x+"+str(b)+")^2"
        expression_dev=coefa2+"x^2+"+str(2*a*b)+"x+"+str(b*b)
    if (choix==1):
        expression_facto="("+coefa+"x-"+str(b)+")^2"
        expression_dev=coefa2+"x^2-"+str(2*a*b)+"x+"+str(b*b)
    if (choix==2):
        expression_facto="("+coefa+"x+"+str(b)+")("+str(a)+"x-"+str(b)+")"
        expression_dev=coefa2+"x^2-"+str(b*b)
    pileouface=random.randint(0,1);
    if(pileouface==0):
        print("énoncé : Développer "+expression_facto);
        print("correction : "+expression_dev);
    if(pileouface==1):
        print("énoncé : Factoriser "+expression_dev);
        print("correction : "+expression_facto);

for i in range(1,30):
    Affichage()
```

2 Économie agricole

• **Durée estimée :** 30 min

• **Objectif :** Expérimentation à travers quelques calculs simples. Mise en équation du problème. Réflexion au travers des résultats d'un programme python donné.

1. **a)** $1200 \times 0,5 = 600$.

Si l'agriculteur récolte aujourd'hui, il aura : 600 €.

b) $(1200 + 30 \times 60)(0,5 - 30 \times 0,01) = 600$

Si l'agriculteur récolte dans 30 jours, il aura 600 €

2. **a)** Poids de la récolte dans n jours : $1200 + n \times 60$

Prix du kg dans n jours : $0,5 - n \times 0,01$

b) comme n est un nombre entier positif, $1200 + 60n$ ne s'annule pas

$$0,5 - 0,01n = 0$$
$$n = 0,5 \div 0,01 = 50.$$

La récolte aura perdu la totalité de sa valeur au bout de 50 jours.

c) $\mathrm{P}(n) = (1200 + 60n)(0,5 - 0,01n)$

$\mathrm{P}(n) = 600 - 12n + 30n - 0,6n^2$

$\mathrm{P}(n) = -0,6n^2 + 18n + 600$

$\mathrm{P}(n) = 0,6(-n^2 + 30n + 1000)$

$\mathrm{P}(n) = 735$

$$\Leftrightarrow -n^2 + 30n + 1\,000 = \frac{735}{0,6} = 1225 \Leftrightarrow -n^2 + 30n - 225 = 0 \Leftrightarrow (n-15)^2 = 0 \Leftrightarrow n = 15.$$

La récolte vaudra 735 € au bout de 15 jours.

3. Les différents calculs montrent que le prix augmente entre le premier et le 15^{e} jour, puis diminue. Nous pouvons donc conjecturer que le jour optimal de la récolte est entre le 15^{e} et le 50^{e} jour.

Le programme calcule P(0) et P(1) et les nomme A et P. Comme prévu A<P.

Le programme va calculer P(n) tant que la récolte du jour précédent vaut moins que la récolte du jour.

Il va s'arrêter dès que la récolte du lendemain vaut plus que celle du jour.

Il détermine ainsi le jour optimal pour la récolte.

3 Format de rectangles

• **Durée estimée :** 40 min

• **Objectif :** Il s'agit de faire faire du calcul littéral en situation pour les élèves au travers d'un problème de la vie quotidienne.

▶ A. Format usuel du papier

1. $f_1 = \dfrac{L}{\ell}$ et $f_2 = \dfrac{\ell}{\frac{L}{2}} = 2\dfrac{\ell}{L}$

2. $f_2 = \dfrac{2}{f_1}$

3. $f = \dfrac{2}{f} \Leftrightarrow f^2 = 2$

4. $\Leftrightarrow f = \sqrt{2}$ ou $f = -\sqrt{2}$

Un format est un quotient de longueur ; il est positif donc $f = \sqrt{2}$.

B. Format d'or

1. $f_1=\dfrac{\mathrm{L}}{\ell}$ et $f_2=\dfrac{\ell}{\mathrm{L}-\ell}$

$$f_1=f_2 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{L}}{\ell}=\frac{\ell}{\mathrm{L}-\ell} \Leftrightarrow \mathrm{L}(\mathrm{L}-\ell)=\ell^2$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{L}^2-\ell\mathrm{L}-\ell^2=0$$

2. $\dfrac{\mathrm{L}^2-\ell\mathrm{L}-\ell^2}{\ell^2}=0 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{L}^2}{\ell^2}-\dfrac{\ell\mathrm{L}}{\ell^2}-\dfrac{\ell^2}{\ell^2}=0 \Leftrightarrow f^2-f-1=0$

```
1 factor(f^2-f-1)
```

$$\left(f+\frac{-(\sqrt{5})-1}{2}\right)*\left(f+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

3. $\mathrm{L}^2-\ell\mathrm{L}-\ell^2=0$

$$\Leftrightarrow \left(f+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(f+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow f+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0 \text{ ou } f+\frac{\sqrt{5}+1}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow f=-\frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ ou } f=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

La deuxième solution est négative elle ne convient pas pour cette situation donc

$$f=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Chapitre 5 Géométrie non repérée

➥Manuel p.122-149

Commentaires pédagogiques

L'objectif de ce chapitre se place à deux niveaux :

• il s'agit d'une part de retravailler des exercices de géométrie plane sans repère, en réinvestissant les contenus de troisième (Pythagore, Thalès, la trigonométrie…),

•d'autre part, et c'est l'objectif majeur, il introduit deux nouvelles notions : le projeté orthogonal sur une droite et les vecteurs. Pour ces nouvelles notions, à partir d'une définition on construit, on représente et on résout des problèmes.

On travaille généralement dans le plan sauf pour quelques exercices qui mobiliseront des connaissances en géométrie de l'espace.

Les capacités mises en jeu dans ce chapitre sont :

• Construire et représenter.
• Calculer.
• Résoudre des problèmes.

Corrigés des activités et des exercices

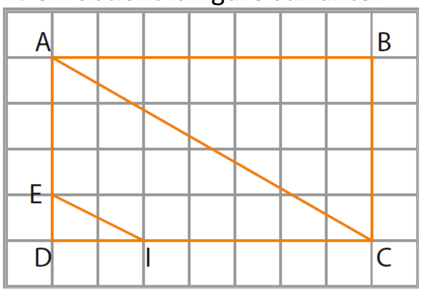
Pour prendre un bon départ p. 123

1 Théorème de Pythagore, de Thalès et trigonométrie

1. On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC **:**

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 49 + 16 = 65$ donc $AC = \sqrt{65}$ **.**

2. On obtient la figure suivante.



On utilise le théorème de Thalès avec les parallèles (EI) et (AC): $\frac{DE}{DA} = \frac{DI}{DC} = \frac{EI}{AC}$

soit $\frac{1}{4} = \frac{DI}{7}$, on en déduit $DI = \frac{7}{4} = 1{,}75$.

3. On applique la trigonométrie dans le triangle rectangle DAC: $\cos(DAC) = \frac{DA}{DC} = \frac{4}{7}$.

À l'aide de la calculatrice , en mode degré, on revient à la valeur de l'angle et on obtient $DAC \approx 55°$.

2 Aires

1. Aire du triangle ABD:

$\mathcal{A}_{ABD} = \frac{AB \times DH}{2} = \frac{8 \times 3}{2} = 12\ cm^2$

Aire du parallélogramme ABCD :

$\mathcal{A}_{ABCD} = AB \times DH = 24\ cm^2$

2. Aire du demi-disque de diamètre [AD]:

$$\mathcal{A}_{demi\text{-}disque} = \frac{\pi \times \left(\frac{AD}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \times (2)^2}{2} = 2\pi\ cm^2$$

3 Volumes

1. Volume du cube :

$\mathcal{V}_{cube} = AB^3 = 4^3 = 64\ cm^3$

2. Volume de la pyramide EABCD :

$$\mathcal{V}_{\text{pyramide}} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{2}$$

$$= \frac{\text{aire ABCD} \times \text{EA}}{2}$$

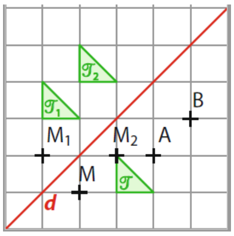
$$= \frac{4^2 \times 4}{2} = 32\ \text{cm}^2$$

4 Identifier un parallélogramme

Situations: **c)d)e).**

5 Compléter une figure en faisant des constructions

On obtient la figure suivante.



Activités

p. 124-125

1 Découvrir le projeté orthogonal

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif** : Observer par conjecture puis démontrer que pour n'importe quel point situé sur une parallèle à un segment le triangle obtenu a la même aire.

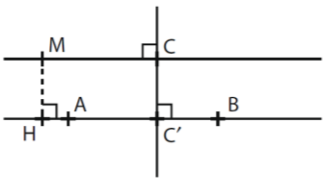
▶ A. Conjecturer avec GeoGebra

1. a) Voir énoncé.

2. Conjecture: l'aire du triangle ABM est la même que celle du triangle ABC quelle que soit la position de M sur *d*.

▶ B. Démonstration dans un cas particulier

1. et **2. a)**



b) $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times CC'}{2} = \frac{5}{2}CC'$.

3. a) CC'HM possède 3 angles droits donc c'est un rectangle. On a alors CC'=MH.

b) $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{5}{2}MH = \mathcal{A}_{ABM}$

Si le triangle est de dimensions 3, 4 et 5 (avec toujours AB=5) alors on prouve par le théorème de Pythagore qu'il est rectangle en C. Son aire est alors égale à

$\frac{CA \times CB}{2} = 6\ \text{cm}^2 = \frac{5}{2}CC'$ d'où $CC' = \frac{12}{5} = 2{,}4$ cm.

2 Découvrir les vecteurs

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Découvrir la notion de vecteurs et l'associer à la configuration du parallélogramme.

1. On reconnaît la translation qui transforme Q en Q'.

2. a) et **b)** Elle transforme A en A' et H en H'.

c) Les quadrilatères QQ'A'A et QQ'H'H sont des parallélogrammes car ils possèdent chacun deux côtés opposés parallèles et de même longueur d'après la translation.

Les côtés $[AA']$ et $[QQ']$ pour l'un et les côtés $[HH']$ et $[QQ']$ pour l'autre.

3. Ces vecteurs ont même direction(les droites (AA'), (QQ') (HH') sont parallèles), même sens(de la gauche vers la droite) et de même longueur.

4. a) Le quadrilatère AA'HH' semble être un parallélogramme car il possède deux côtés opposés $[HH']$ et $[AA']$ parallèles et de même longueur d'après la translation

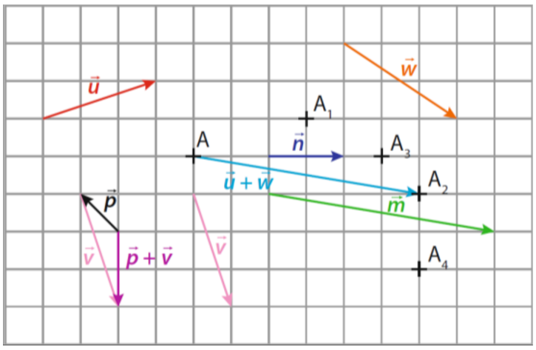
b) $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{A'H'}$ sont égaux car le quadrilatère AA'H'H est un parallélogramme . Les vecteurs $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{G'M'}$ sont égaux, ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{HL}$ et $\overrightarrow{H'L'}$.

5. Supposons que les points A, G et M sont alignés. En considérant A', G' et M' leurs images par la translation on sait que les droites (GM) et (G'M') sont parallèles ainsi que les droites (AM) et (A'M'). Puisque (AM) et (GM) représentent la même droite on en déduit que (G'M') et (A'M') seront aussi parallèles, donc confondues puisqu'elles ont un point en commun. Donc A', M'et G' sont alignés.

2 Enchaîner deux translations

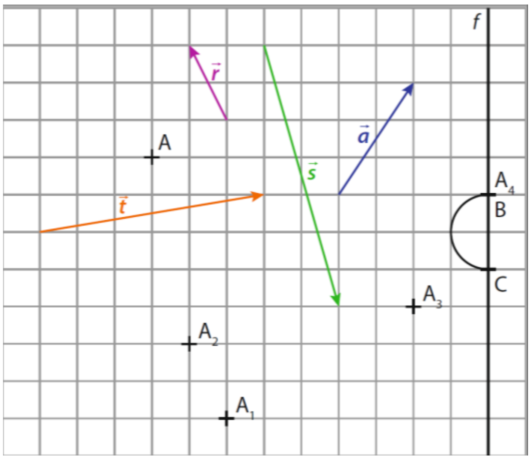
- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir la somme de deux vecteurs.

1. et **2.**



$\vec{u}+\vec{w}$ est égal au vecteur $\vec{m}$.

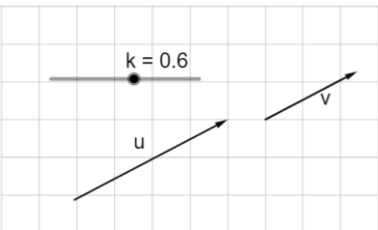
3. Oui le palet rentre dans le but !



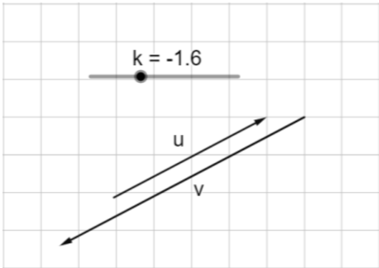
4 Multiplier un vecteur par un réel

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Découvrir l'effet de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel .

1. et **2.** Ci-dessous avec k= 0,6.



Ci-dessous avec k= -1,6.

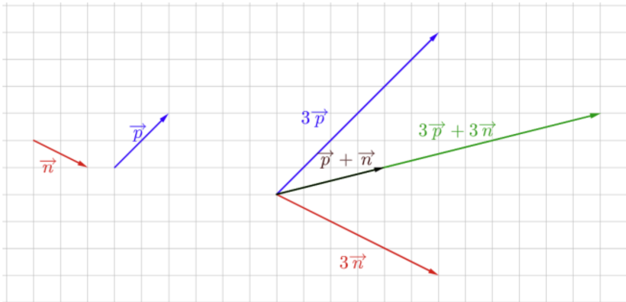


3. Si k=1 les vecteurs sont égaux.

Si k>1 alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction et le même sens et $\|\vec{u}\| < \|\vec{v}\|$

- si k<-1 alors même direction et sens opposés et $\|\vec{u}\| < \|\vec{v}\|$
- si 0<k<1 alors même direction et même sens $\mathcal{A}_{\text{ABC}} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{\text{ABCD}} = 9$ et $\|\vec{u}\| > \|\vec{v}\|$.
- si -1<k<0 alors même direction et sens opposés et $\|\vec{u}\| > \|\vec{v}\|$.

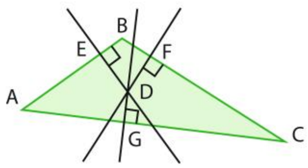
4. Sur GeoGebra en prenant deux vecteurs on conjecture que l'égalité est vraie.



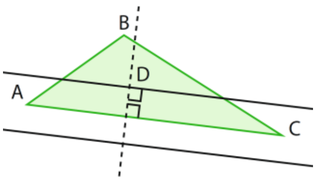
Exercices résolus

À vous de jouer ! p. 127

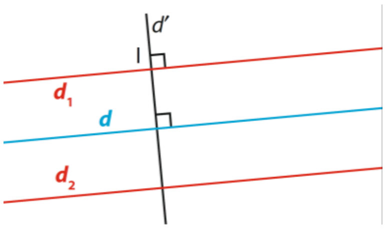
1 **1 .** Pour chacun des côtés du triangle on mène la perpendiculaire passant par D et on considère le point obtenu avec le côté.



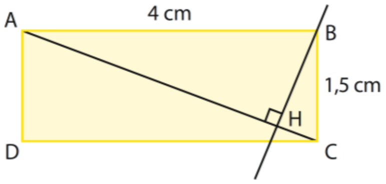
2 . L'ensemble est constitué de deux droites : la droite parallèle à (AC) passant par D et son image par la symétrie d'axe (AC).



2 Les points appartiennent soit à la parallèle à *d* passant par I soit à son image par la symétrie d'axe *d*. Pour tracer cette parallèle, on commence par tracer la perpendiculaire à *d* passant par I puis la perpendiculaire à celle-ci en I. Son image par symétrie s'obtient de la même manière.



3 **1.**



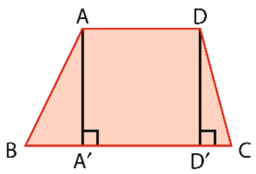
2. Par le théorème de Pythagore on obtient :

$AC=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}$

3. On a aussi $\mathcal{A}_{ABC}=\dfrac{AC\times BH}{2}=9$.

On en déduit que $BH=\dfrac{18}{\sqrt{45}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$

4 On construit les projetés A' et D' en traçant les perpendiculaires à (BC) en A et en D.
(AD) et (BC) étant parallèles, le quadrilatère ADD'A' possède 4 angles droits c'est donc un rectangle.



5 **1.** $\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{CR}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ ou encore $\overrightarrow{BR}=\overrightarrow{RD}$.

6 **1.** $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{CG}$ ou encore $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{KJ}$

2. $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{LK}$.

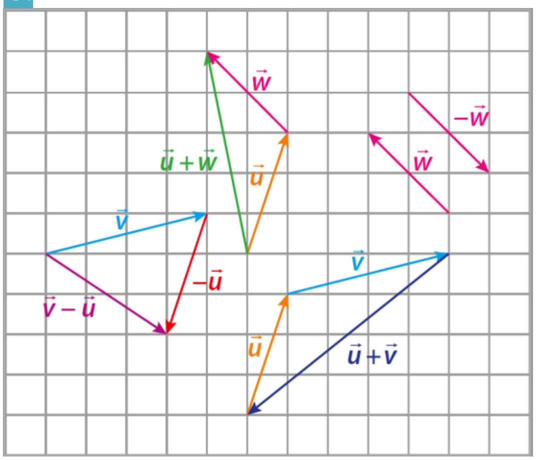
7 **1.** $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{EH}$

2. C'est un parallélogramme.

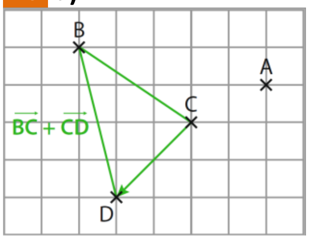
8 **1.** Par la symétrie de centre D on peut affirmer que D est le milieu de $[AJ]$ et de $[IK]$, on a alors $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{DK}$

2. Les diagonales se coupent en leur milieu donc le quadrilatère AIJK est un parallélogramme.

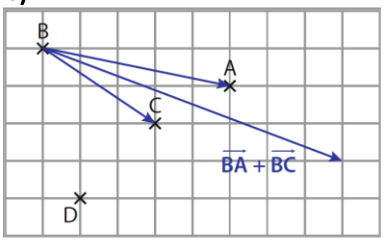
9.



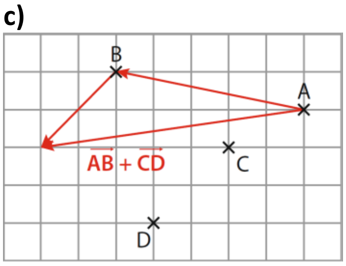
10 **a)**



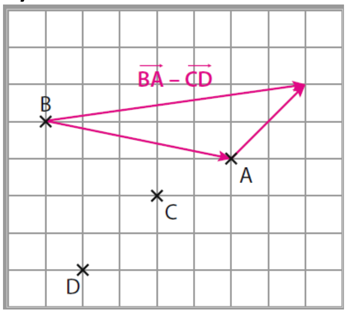
b)



c)



d)



11 **a)** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

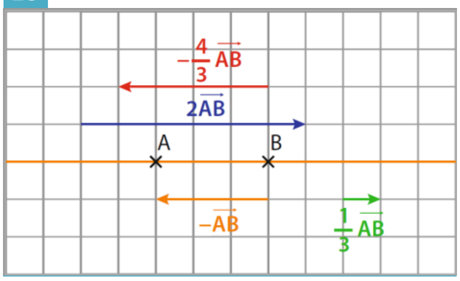
c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$.

12 **a)** $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{RM}=\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{RN}$

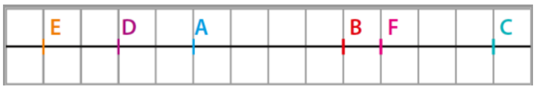
b) $\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{TR}=\overrightarrow{TR}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{TS}$

c) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CC}=\vec{0}$

13



14 Pour un tracé plus simple prendre A et B distants de 4 unités.



15 **1.**

$$-2\overrightarrow{AP}=-2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BR}$$

2. Les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{BR}$ sont colinéaires donc les droites (AP) et (BR) sont parallèles.

16 **1.** $2\overrightarrow{AN}=2\times\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}$

2. Les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires avec un point en commun on en déduit que les points A, M et N sont alignés.

Exercices résolution de problèmes

p. 134

17 Vecteurs et colinéarité

On utilise le réflexe 2 pour montrer que les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
C'est une situation où l'on peut utiliser la relation de Chasles.
Par la relation de Chasles on a :

$$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=-2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}=2\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=2\overrightarrow{CB}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires donc les droites (ED) et (BC) sont parallèles.

18 Milieux et colinéarité

On utilise le réflexe 2 : on reconnaît une situation de Thalès et aussi une situation où l'on peut utiliser la relation de Chasles avec des vecteurs.

L'objectif est de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MK}$ sont colinéaires.
Par la relation de Chasles on a :

$$\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{MC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Par Thalès, avec les parallèles (DC) et (AB) et les sécantes (AC) et (BD) on a $\frac{MC}{MA}=\frac{DC}{AB}$

on en déduit que $\overrightarrow{MA}=-5\overrightarrow{MC}$.

On a aussi $\overrightarrow{AB}=-5\overrightarrow{CD}$ d'après l'énoncé.

On a alors : $\overrightarrow{MI}=-5\overrightarrow{MC}+\frac{-5}{2}\overrightarrow{CD}=-5\overrightarrow{MK}$

Les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MK}$ sont colinéaires donc les points sont alignés.

19 Milieux et colinéarité

On peut utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour conjecturer.
Il semble que les points A, B, B_1, B_2, B_3 soient tous situés sur le cercle de diamètre $[AB]$.
La démonstration s'appuie sur la propriété suivante: Étant donné deux points A et B, si un point M forme un triangle rectangle MAB alors M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.
Les points B_1, B_2, B_3 sont les projetés orthogonaux de B sur les droites.

Ces droites passent par A donc on peut affirmer que les triangles AB_1B, AB_2B et AB_3B, sont rectangles respectivement en B_1, B_2 et B_3. En utilisant la propriété déjà citée, on en déduit que les points B_1, B_2, B_3 sont sur le cercle de diamètre $[AB]$.

Exercices automatismes p. 135

Rituel 1

20 **a)** $0{,}25\times4\times25\times4\times12=1\times100\times12=1200$

b) $99\times100+99=9\,999$

21 $\frac{3\times5}{4}+\frac{4}{4}=\frac{19}{4}$

22 $\frac{RA}{RU}=\frac{SA}{EU}$ donc $\frac{4}{RU}=\frac{5}{9}$

$RU=\frac{4\times9}{5}=\frac{36}{5}=7{,}2$

23 Par le théorème de Pythagore dans le triangle ABC on a :

$AC^2=3^2+3^2=18$ donc $AC=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

24 Par le théorème de Pythagore dans le triangle SHA on a :

$$SA^2=SH^2+AH^2=5^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=29{,}5$$

Donc $SA=\sqrt{29{,}5}=\frac{\sqrt{118}}{2}$

Rituel 2

25 $\frac{2\times3}{3}+\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2}=2{,}5$

26 $\frac{3}{4}+\frac{7\times3}{2\times4}=\frac{3}{4}+\frac{21}{8}=\frac{6}{8}+\frac{21}{8}=\frac{27}{8}$

27 $FG^2=9^2-7^2=32$

28 7 000 cm par 15 000 cm ou encore 70 m par 150 m.

Rituel 3

29

$$\frac{\frac{2}{5}+\frac{5}{5}}{\frac{2}{5}+\frac{15}{5}}$$

$$=\frac{\frac{7}{5}}{\frac{17}{5}}$$

$$=\frac{7}{5}\times\frac{5}{17}=\frac{7}{17}$$

30 $0{,}3\times10\times16=48$

31 $\sin\left(EGF\right)=\frac{7}{9}$.

Avec la calculatrice, on obtient $EGF\approx51°$.

32 155,4 cm = 140 cm + 14c m + 1,4 cm = 14 dm+14 cm +14 mm

Rituel 4

33 **a)** $-18{,}5$ **b)** $\frac{1}{5}$

34 $\frac{5}{2}+\frac{7\times3}{2}=\frac{26}{2}$=13

35 ABFE, ABCD, EDCF.

36

$$\mathcal{V}=\frac{\text{aire de la base}\times\text{hauteur}}{3}=\frac{3^2\times5}{32}=15\text{ cm}^3$$

Exercices d'entraînement
p. 136-142

Je consolide mes acquis

37 **Théorème réciproque de Pythagore**

1. a) 100=36 + 64 soit $BC^2=AC^2+AC^2$ donc le triangle ABC est rectangle en A.

38 **Trigonométrie**

$$\cos\left(ABC\right)=\frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}=\frac{4}{5}$$

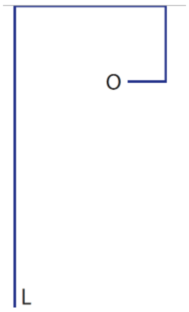
39 **Théorème réciproque de Thalès**

La somme des angles dans un triangle donne $BCA=110°$ alors les triangles ABC et DEF ont leurs trois angles deux à deux égaux donc ils sont semblables.

40 **Comprendre un script écrit en Scratch**

Les quotients $\frac{AB}{AC}=\frac{2}{3}$ et $\frac{AD}{AE}=\frac{3}{4}$ ne sont pas égaux donc par la contraposée du théorème de Thalès les droites (BD) et (CE) ne sont pas parallèles.

41 La figure donne avec pour longueurs successives 40, 80, 160 et 320.
On peut alors appliquer le théorème de Pythagore pour retrouver la distance du lutin L au point de départ O:



$OL^2=(160-40)^2+(320-80)^2$

$=72\,000$ soit $OL=120\sqrt{5}\approx 268$ pas.

Calculer des longueurs, des aires et des volumes

42 **1. a)** $BD=\sqrt{29}$

b) $ABD\approx 22º$

2. $AF=\frac{3}{5}AD=1{,}2.$

43 **1.** À partir du sinus de l'angle on obtient $ABC=\ 30°$.
2. Par la somme des angles dans un triangle on a $BAC=60°$.
2. Par le théorème de Pythagore :
$BC=\sqrt{64-16}=4\sqrt{3}$
Avec la trigonométrie :
$BC=8\times\cos(ABC)=4\sqrt{3}$.

44 Elle renvoie la valeur $\sqrt{6^2+8^2}$ soit **10**.

45 **1.** La hauteur est DC qui mesure 4,5 cm.
2. $\mathcal{V}=\frac{\mathcal{A}_{BCGF}\times DC}{3}=9\text{ cm}^3$.

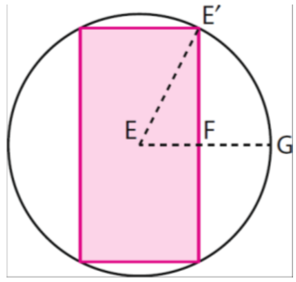
46 **1.** On calcule par le théorème de Pythagore la longueur $BD=\sqrt{8}$ puis la diagonale $BH=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.
Donc le rayon de la sphère est $OB=\sqrt{3}$

$\mathcal{V}_{\text{sphère circonscrite}}=\frac{4\times\pi\times OB^2}{3}=4\pi\text{ cm}^3$

2. Le rayon de la sphère inscrite est $\frac{BC}{2}=1\text{ cm}$.

$\mathcal{V}_{\text{sphère inscrite}}=\frac{4\times\pi\times 1^2}{3}=\frac{4\times\pi}{3}\text{cm}^3$.

47 Le rayon du cercle est EG=13=E'E'
où E' est le sommet du rectangle en haut à droite.



Par le théorème de Pythagore dans le triangle EE'F rectangle en F on a $E'F=\sqrt{13^2-25}=12$.
L'aire du rectangle est $24\times 10=240$.

48 **1.** et **2.** Par le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectanlgle en B, on a $AC=\sqrt{50}$ = AE qui est le rayon du cercle.

3. $\mathcal{A}_{ABCD}=25$

$\mathcal{A}_{DEFG}=DE^2=DA^2+AE^2=25+50=75$

$\mathcal{A}_{DEFG}=DE^2=50+25=75$ par le théorème de Pythagore dans le triangle ADE rectangle en A.
C'est bien le triple de 25.

Questions de cours

49 **1.** Le projeté orthogonal est le point obtenu par intersection de la droite d avec la perpendiculaire à *d* passant par M.
2. La distance d'un point à une droite, est la plus courte distance de M à la droite, soit la distance entre M et son projeté orthogonal sur la droite.

50 **1.** Dans un triangle ABC de base $[BC]$ la hauteur est la distance entre le sommet A et la droite (BC).
2. Non car la hauteur est la plus courte distance du sommet A à la droite (BC).

51 **1.** Direction, sens et norme.
2. Non car l'ordre des sommets ne convient pas.

52 **1.** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

53 **1.a)** On met les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ bout à bout.
b) On construit $-\vec{v}$ puis on met les vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{v}$ bout à bout.

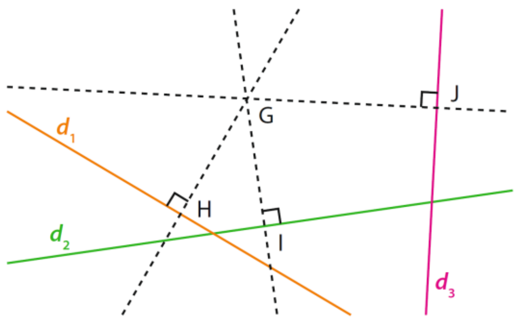
2. C'est un vecteur colinéaire à $\vec{u}$.

Définition du projeté orthogonal

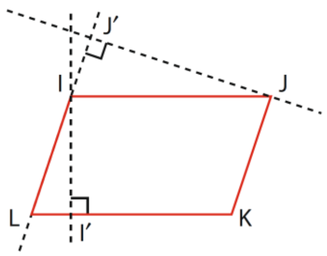
54 **a)**D **b)**G **c)**B

55 B est le projeté orthogonal de A sur (BC).
D est le projeté orthogonal de B sur (AD).

56

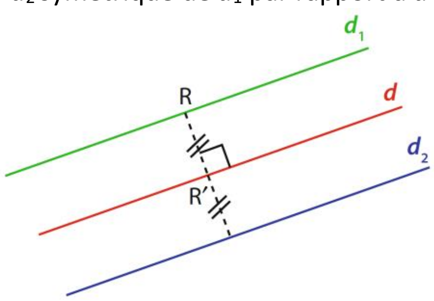


57



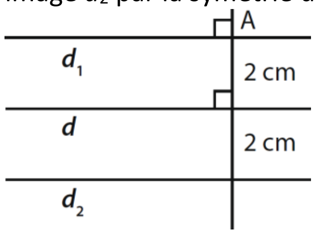
Distance d'un point à une droite

58 **1.** **2.** et **3.** Deux droites parallèles à d:
- d_1 qui passe par R,
- d_2 symétrique de d_1 par rapport à d .



4. Si R est sur d alors R'=R et les deux droites d_1 et d_2 sont confondues avec d.

59 **1.** Sur une droite perpendiculaire menée à d on place un point A à 2 cm de d. L'ensemble cherché est constitué de deux droites : la droite d_1 parallèle à d passant par A et son image d_2 par la symétrie d'axe d.

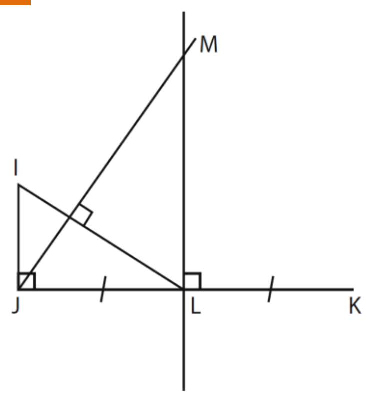


2. On reprend la construction du **1.** mais avec A à 4 cm de d. L'ensemble cherché est constitué des points situés entre les deux droites.

60 On considère un point A de d et son projeté A' sur d'. L'ensemble des points à égale distance de d et de d' est la médiatrice du segment $[AA']$.

61 L'ensemble des points est constitué des deux bissectrices des deux droites.

62 **1.**

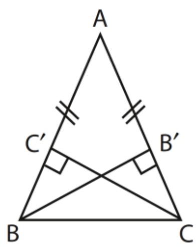


2. Le point L.

3. Le point J.

4. (ML) est parallèle à (JI) donc les deux points M et L sont à la même distance de (IJ).

63 **1.** et **2.**



3. On nomme B’ et C’ les projetés orthogonaux respectifs de B et C.

$\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AB \times CC'}{2} = \dfrac{AC \times BB'}{2}$.

Or AB = AC donc on en déduit que CC’=BB’ soit que les distances de C à (AB) et de B à (AC) sont égales.

64 $\mathcal{A}_{ABCD}$ = $AB \times DH = 24$ donc

$DH = \dfrac{24}{AB} = \dfrac{24}{8} = 3\,\text{cm}$

65 En notant R’ et P’ les projetés orthogonaux respectifs de R et P sur (MN) et puisque MNP et MNR ont la même aire alors on a :

$MN \times RR' = MN \times PP'$ donc $PP' = RR'$ ce qui signifie que P et R’ sont à la même distance de (MN).

66 **1.** $LNM = 59°$ et la somme des angles dans le triangle LNM donne

$LMN = 180° - 31° - 59° = 90°$.

2. Il faut calculer LM, par la trigonométrie dans le triangle LNM :

$\tan\left(LMN\right) = \dfrac{NM}{LM}$ soit

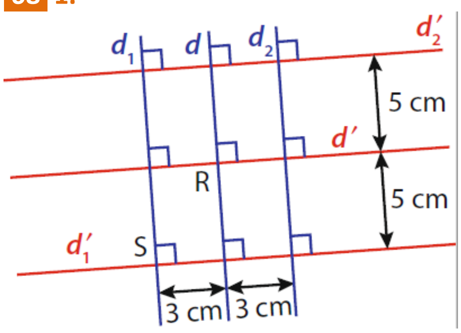
$\tan(31°) = \dfrac{2}{LM}$ donc $LM = \dfrac{2}{\tan(31°)} \approx 3{,}3\,\text{cm}$

67 **1.** C’est la médiatrice du segment $[AB]$.

2. C’est le cercle de centre A et de rayon 4 cm.

3. Deux points d’intersection.

68 **1.**



2. Ce sont deux droites d_1 et d_2 parallèles à d et symétriques l’une de l’autre par rapport à d.

3. Ce sont deux droites d'_1 et d'_2 parallèles à d' et symétriques l’une de l’autre par rapport à d'.

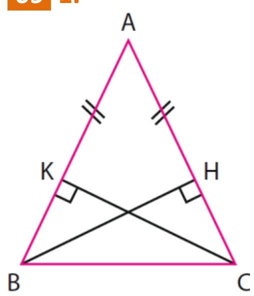
4. Le point S se trouve à l’intersection de d_1 et de d'_1 par exemple. Il y a 4 solutions possibles.

5. d et d' étant perpendiculaires les droites d_i et d'_i le sont aussi ,

$RS^2 = 3^2 + 5^2 = 34$ donc $RS = \sqrt{34}$.

Projeté orthogonal et configurations géométriques

69 **1.**



$BHC = CKB = 90°$. Or HBC = CBK car le triangle ABC est isocèle en A et les angles à la base sont égaux. Ainsi les triangles HBC et KBC sont semblables avec un côté commun BC donc ils sont égaux.

2. Puisque AC=AB et que CH=BK alors AH=AK. La réciproque du théorème de Thalès donne :

$\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AK}{AB}$ donc (HK)//(BC).

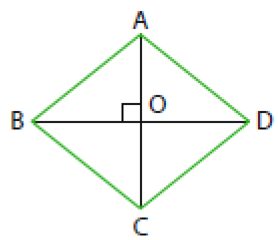
70 **1.** On a $17{,}5^2 = 10{,}5^2 + 14{,}5^2$ ainsi $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc par la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en B.

2. $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AB \times BC}{2} = 73{,}5$ et $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AC \times BH}{2}$

donc $\dfrac{17{,}5 \times BH}{2}$ =73,5 .

3. On en déduit $BH = 8{,}4$.

71 **1.**



2. En notant B’ le projeté orthogonal commun on a (BB’) $\perp$ (AC) et (DB’) $\perp$ (AC) donc (BD) $\perp$ (AC).

3. Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

72 **Esprit critique**

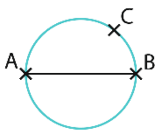
Il suffit de tester si $12^2 = 10^2 + 7^2$? l'égalité n'est pas vérifiée dont par la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ABD n'est pas rectangle en et D' n'est pas le projeté de B sur (AC).

73 **Analyser un problème**

On nomme C’ le projeté orthogonal de C sur d_2 alors CC’ = 3 cm et $AC' = \dfrac{CC'}{\sin(30°)} = \dfrac{3}{\frac{1}{2}} = 6\,\text{cm}$.

74 **Esprit critique**

1. et **2.a)**



b) Les points sont les intersections du cercle avec les deux droites parallèles à (AB), symétriques par rapport à (AB) et dont une passe par C.

Lorsque C est situé sur la médiatrice de $[AB]$ alors il n’existe que 2 points d’intersection.

Déterminer les caractéristiques d'un vecteur

75 **a)** $\vec{p}$ et $\vec{r}$ **b)** $\vec{m}$ **c)** $\vec{t}$

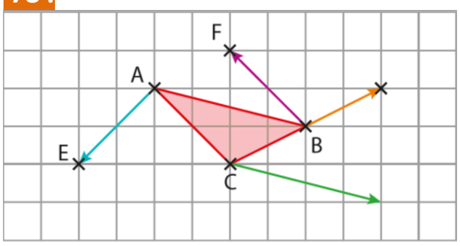
76 **1.** $\overrightarrow{DE}$ **2.** $\overrightarrow{GD}$ **3.** $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{CD}$

77 **1.** Les images de C, D et E sont respectivement Y, Z et D.

2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CY} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DZ}$

3. ABYC, ABDE, ABZD.

78 .



79 **Vérifier un résultat**

a) Faux. **b)** Vrai. **c)** Vrai.
d) Faux. **e)** Vrai. **f)** Vrai.
g) Vrai. **h)** Vrai. **i)** Vrai.

80 $\cos 30° = \dfrac{AH}{AM}$ d'où

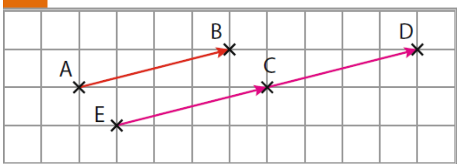
$$AM = \frac{AH}{\cos 30°} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

81 $\|\vec{u}\| = \sqrt{20^2 + 50^2} = 10\sqrt{29}$ km/h.

Si la norme du vecteur diminue de 10 % alors la norme du nouveau vecteur vaut $0{,}9\|\vec{u}\|$ soit vaut $9\sqrt{29}$ km/h.

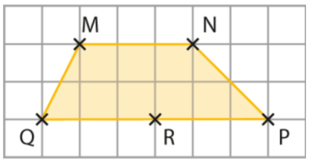
Démonstration avec des égalités de vecteurs

82 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CD}$ donc C est le milieu de $[ED]$



83

1.



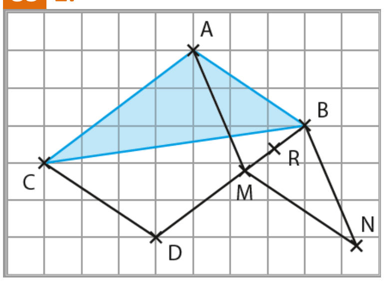
2. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RP}$ car ils ont même sens et même direction (MNPQ est un trapèze avec (MN)//(PQ)) mais aussi même norme puisque 2MN=QP.

3. MNRQ et MNPR.

84 **1.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$

2. D’après l'égalité $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$ on en déduit que DCEF est un parallélogramme.

85 **1.**



2. La quadrilatère ABNM est un parallélogramme puisque ses diagonales se coupent en leur milieu. Ainsi on en déduit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$. On a aussi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CD}$. Le quadrilatère CDNM est donc un parallélogramme.

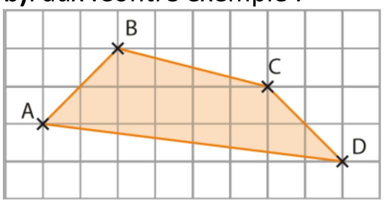
86 **1.** On a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CF}$ donc ACFB est un parallélogramme, on en déduit que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BF}$
On a aussi $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AG}$ donc ACBG est un parallélogramme, on en déduit que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{GB}$
Ainsi $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{GB}$.
2. On en déduit que B est le milieu de $[GF]$.

87 **1.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BE}=$
2. On a donc $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BE}$ ainsi AFED et ACEB sont des parallélogrammes.
3. ACEB est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}$.

Dans les losanges on a $\overrightarrow{CH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{GB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{GB}$.
4. Ainsi CHBG est un parallélogramme et il possède un angle droit en H car les diagonales d'un losange (ici CFHE) sont perpendiculaires. Donc CHBG est un rectangle.

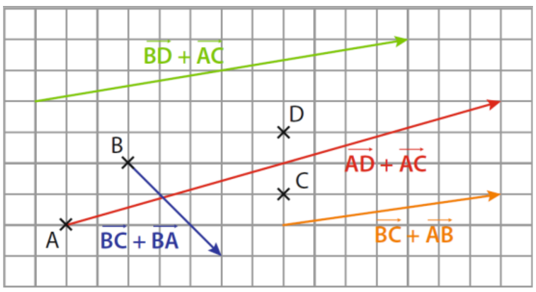
88 **1. a)** Faux, ordre des points .
b) Faux .Contre exemple :



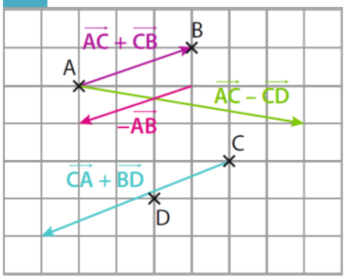
c) Vrai . B est alors le milieu de $[AC]$.
2. Réciproques :
a) Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ alors ABCD est un parallélogramme : Faux.
b) Si ABCD est un parallélogramme alors AB=CD : Vrai.
c) Si A, B et C sont alignés alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$: Faux

Somme et différence de deux vecteurs, vecteurs opposés

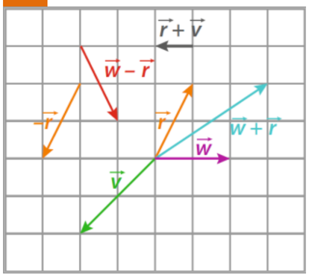
89 **Attention :** dans les question **a)** et **c)** il faut remplacer I par C.



90



91

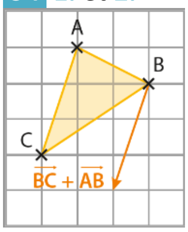


92 **1.a)** $\overrightarrow{HI}$ **b)** $\overrightarrow{DE}$
2.a) $\overrightarrow{DF}$ **b)** $\overrightarrow{GH}$ **c)** $\overrightarrow{AD}$
d) $\overrightarrow{BH}$ **e)** $\overrightarrow{AC}$ **f)** $\overrightarrow{DC}$

Relation Chasles, manipulation algébrique

93 **a)** $\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{TR}=\overrightarrow{SR}$
b) $\overrightarrow{BV}-\overrightarrow{CV}=\overrightarrow{BV}+\overrightarrow{VC}=\overrightarrow{BC}$
c) $\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{CD}$
d) $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}$

94 **1.** et **2.**

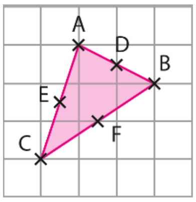


3. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

95 **1.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$
2. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AB}$

96 **1.** $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}$
2. $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}$
3. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}$

97 **1.**

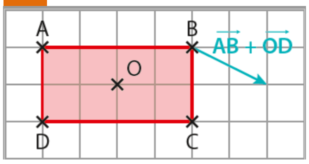


2.a) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{BF}$

b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{DF}$

3. $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$

98 **1.**



2. $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}$

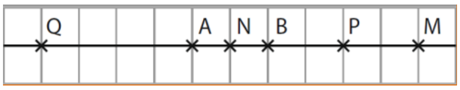
3. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{BO}$

99 **1.** $\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

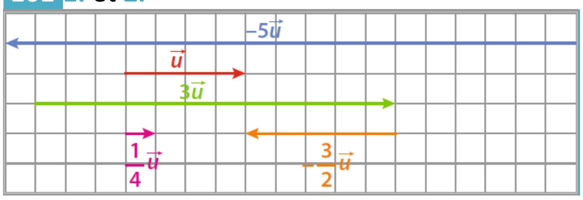
2. $\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{HB}$ et comme $\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AB}$ alors ABGH est un parallélogramme.

Produit d'un vecteur par un nombre réel

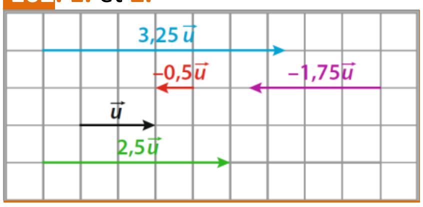
100



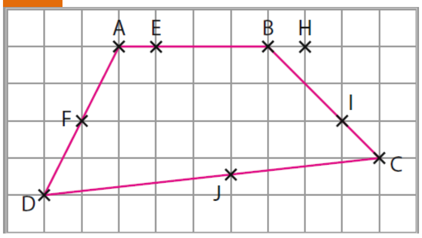
101 **1.** et **2.**



102. 1. et **2.**



103 **1.**



2. a) $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ **c)** $\overrightarrow{CI}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{BC}$

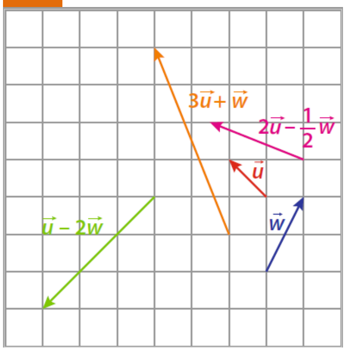
d) $\overrightarrow{EB}+3\overrightarrow{EA}=\vec{0}$ **e)** $\overrightarrow{FA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

104 **a)** $\overrightarrow{UT}=3\overrightarrow{UR}$ **b)** $\overrightarrow{US}=4\overrightarrow{RV}$

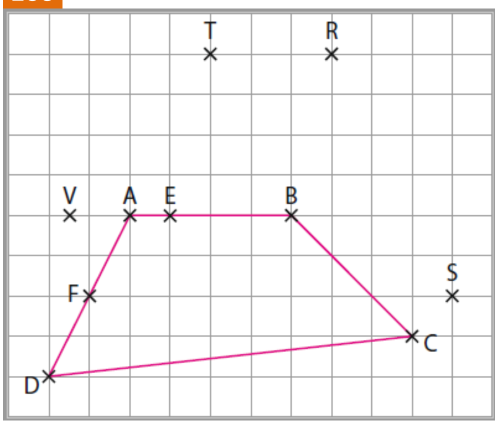
c) $\overrightarrow{UX}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{UR}$ **d)** $\overrightarrow{UW}=-2\overrightarrow{UR}$

e) $\overrightarrow{UT}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{UW}$ **f)** $\overrightarrow{RX}=-3\overrightarrow{RV}$

105



106



107 **a)** $\overrightarrow{IP}$ **b)** $\overrightarrow{IK}$ **c)** $\overrightarrow{IM}$ **d)** $\overrightarrow{LK}$

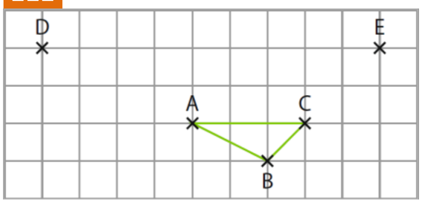
Application de la colinéarité

108 **a)** Oui. $\vec{v} = -3\vec{u}$ **b)** Oui. $\vec{v} = -2\vec{u}$
c)Non **d)**Oui. $\vec{v} = -3\vec{u}$

109 **1.** $-3\overrightarrow{AN} = -3(\frac{-1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) =$
$\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires avec un point en commun donc les points A, M et N sont alignés.

110 **1. a)** $\frac{-1}{3}$ **b)** $\frac{-2}{3}$ **c)** $\frac{-1}{2}$ **d)** $\frac{1}{3}$
2. a) $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP}$
b) Elles sont parallèles.

111



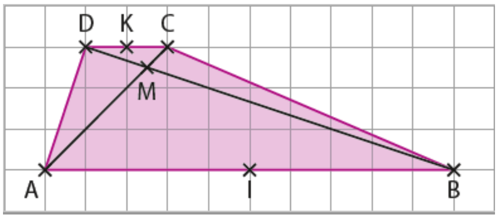
1. a) C'est la relation de Chasles utilisée deux fois.
b)
$\overrightarrow{DE} = 2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$
$= 3\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{BC}$
$= 3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = 3\,\overrightarrow{AC}$
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires donc les droites (AC) et (DE) sont parallèles.

112 **1. a)** C'est la relation de Chasles.
b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$
2.
$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
$= -2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$
car ABCD est un parallélogramme.
Donc $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DB}$. On en déduit que ECBD est un parallélogramme.

113 **1.** $\frac{WX}{WY} = \frac{1,5}{4,7}$ et $\frac{WU}{WV} = \frac{1,2}{4,5}$.
Il n'y a pas égalité donc par la contraposée de Thalès, les droites (XU) et (VY) ne sont pas parallèles et les vecteurs $\overrightarrow{XU}$ et $\overrightarrow{VY}$ ne sont pas colinéaires.

2. $\frac{WX}{WY} = \frac{1,2}{3,6} = \frac{1}{3}$ et $\frac{WU}{WV} = \frac{1,5}{4,5} = \frac{1}{3}$.
Il y a égalité donc par la réciproque de Thalès, les droites (XU) et (VY) sont parallèles et les vecteurs $\overrightarrow{XU}$ et $\overrightarrow{VY}$ sont colinéaires.

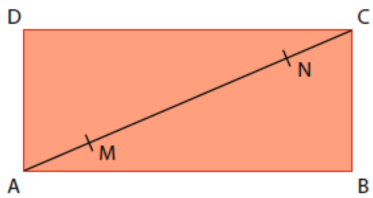
114 **Émettre une conjecture**
1.



2.a) Il semble que les points K, M et I sont alignés.
b) Par le théorème de Thales avec les parallèles (DC) et (AB) on obtient les égalités vectorielles : $\overrightarrow{BM} = 5\overrightarrow{MD}$ et $\overrightarrow{AM} = 5\,\overrightarrow{MC}$.
On a alors $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{MD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$
et $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 5\,\overrightarrow{MD}$
$= \frac{1}{2} \times 5 \times \overrightarrow{DC} + 5\,\overrightarrow{MD} = 5\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{MD}\right) = 5\,\overrightarrow{MK}$
Les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{MK}$ étant colinéaires avec le point M en commun on en déduit que les points K, M et I sont alignés.

À chacun son rythme

115 **Énoncé A**
1.



2. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NC}$.
3. Les droites sont confondues.

Énoncé B

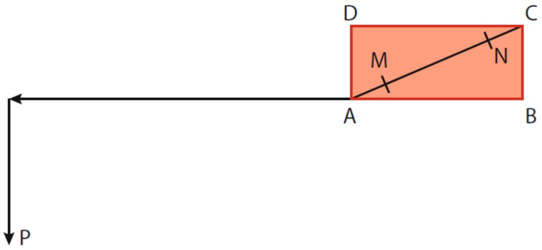
1. $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.

2. $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{5}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.

3. a) On a $\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{DN}$. **b)** Les droites sont parallèles.

Énoncé C

La figure est réalisée à l'échelle 1/2.



1. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Donc $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{AC}$.

2. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$

$= \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{10}\overrightarrow{AP}$.

Exercices de synthèse

p. 143

116 Puissances

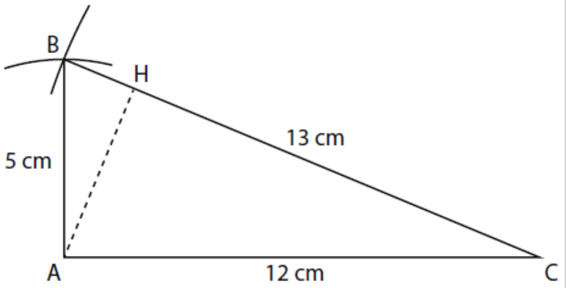
$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABEC} = 17{,}5 = AB \times EE'$

où E' est le projeté orthogonal de E sur (AB).

On en déduit EE'= $\frac{17{,}5}{5} = 3{,}5$.

117 Calculer une longueur

1. La figure est réalisée à l'échelle 1/2.



2. Le triangle ABC est rectangle en A car $13^2 = 12^2 + 5^2$.

3. $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{12 \times 5}{2} = 30$

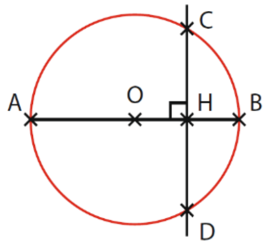
On a aussi $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{AH \times 13}{2}$

On en déduit : $\frac{AH \times 13}{2} = 30$

$AH = 30 \times \frac{2}{13} = \frac{60}{13}$ cm

118 Dans un cercle

1.



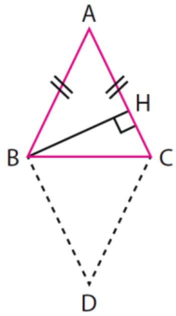
2. Ce sont des rayons du cercle.

3. H est le milieu des diagonales $[OB]$ et $[CD]$ qui sont aussi perpendiculaires

Donc OBDC est un losange.

119 Conjecturer et démontrer

1.



2. ABDC semble être un losange.

3.a) La relation de Chasles permet d'écrire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$.

b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$.

Alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{AH}$.

c) On a $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AH}$ donc H est le milieu de $[AD]$

.

ABDC possède des diagonales de même milieu et perpendiculaires, c'est donc un losange.

120 Droites parallèles

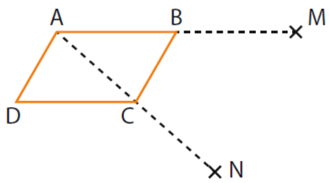
1. On applique la relation de Chasles puis

$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RM} + \overrightarrow{MS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PM} + \frac{1}{4}\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PN}$.

2. les droites sont parallèles.

121 Nature d'un quadrilatère

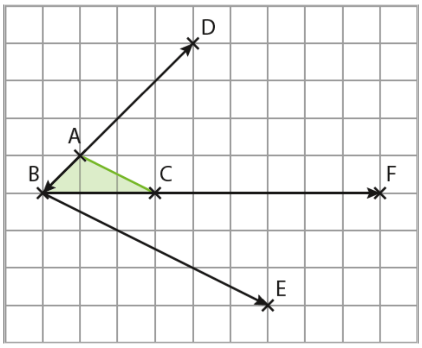
1. et **2.**



3. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BC}$.

4. BCNM est un trapèze.

122 Placer des points



123 Milieu

1.a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MN}$.

b) $\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

2. a) et **b)**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NP}&=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CP}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\&=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

3. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NP}$ donc N est le milieu de $[MP]$.

124 Triangles emboîtés

3. La somme des angles dans un triangle isocèle donne $ACE=45°$ et $BCF=45°$.

De plus $ACB=180°=ACE+BCF+ECF$

On en déduit que $ECF=90°$

4. a) La somme des angles dans un triangle donne:

$BAG+ABG+AGB$

$=CAE+CBF+AGB$

$=45°+45°+AGB=180°$

Donc $AGB=90°$. Le triangle ABG est donc rectangle en G.

b) ECFG possède 4 angles droits, c'est donc un rectangle.

c) Les diagonales [CG] et [EF] du rectangle ECFG se coupent en un même milieu.
M est le milieu de [EF] et est donc également celui de [CG].

5. La réciproque de Thalès appliquée dans les triangles AGC et CGB montre que les quotients $\dfrac{GI}{GA}$, $\dfrac{GM}{GC}$ et $\dfrac{GJ}{GB}$ sont égaux à $\dfrac{1}{2}$, donc les droites (IM) et (AC) d'une part puis (JM) et (BC) d'autre part, sont parallèles. Comme (AC) et (BC) sont confondues alors (IM) et (JM) sont parallèles à (BC), avec un point commun M, elles sont aussi confondues.

6.a) Les demi droites $[AE)$ et $[BF)$ forment toujours un angle de 45°avec (BC) donc elles sont fixes. Ainsi leur intersection G l'est aussi et également les points I et J.

b) Le point M évoluant sur la droite (IJ), inchangée, sera toujours à la même distance de (BA) ce qui signifie que MH est constante.

Exercices d'approfondissement

p. 144

125 Les lunules

1. a) Par Le théorème de Pythagore on obtient $DC=\sqrt{2}$.

b) $\mathcal{A}_{\text{carré}}=2$

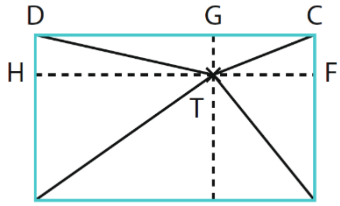
2. $\mathcal{A}_{\text{disque}}-\mathcal{A}_{\text{carré}}=\pi-2$

3. $\mathcal{A}_{\text{demi-cercles}}=4\times\dfrac{\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2}=\pi$

4. $\mathcal{A}_{\text{lunules}}=\pi-(\pi-2)=2$

126 La carte au trésor

Le terrain est représenté par le rectangle ABCD et le trésor T est tel que
TA = 1 260,
TC = 320
et TB = 1 120. Il faut calculer la distance TD.



On trace la parallèle à (AB) passant par T et la parallèle à (AD)passant par T. On construit ainsi les points E,F,G et H sur les quatre côtés du rectangle ABCD.
On note $x=$ TF, $y=$TH, $z=$TG et $t=$TE.

Par Le théorème de Pythagore on a :

$1\,120^2 = TB^2 = x^2 + t^2$,

$1\,260^2 = TA^2 = y^2 + t^2$ et $320^2 = TC^2 = x^2 + z^2$

alors

$TD^2 = y^2 + z^2 = 1\,260^2 + 320^2 - 1\,120^2 = 660^2$

127 Points alignés

Par Chasles on a :

$2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$= \vec{0}$, ainsi $3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, les vecteurs sont colinéaires avec A en commun donc les points A, B et C sont alignés.

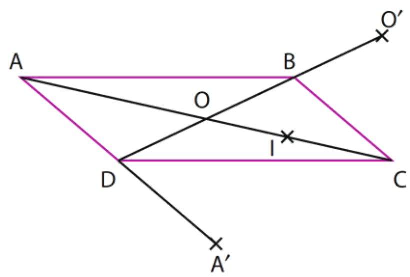
128 Longueur constante

1. Les triangles MEB et MFC sont rectangles (avec (ME) parallèle à (AI) qui est perpendiculaire à (BC)) et isocèles en M (l'angle à la base est de 45° comme dans le triangle ABC).

2. ME+MF= MB+MC= BC.

129 Un milieu

1. et **2.**



3.a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{BC}$ donc DBCA' est un parallélogramme et $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{DB}$.

b) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ donc $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{DB}$.

c) On en déduit que $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{A'C}$ donc OO'CA' est un parallélogramme , les diagonales ont le même milieu.

Vers la 1re

130 Vers la spécialité Maths

1. a) $c^2 = h^2 + x^2$

b)

$c^2 = (b^2 - (a-x)^2) + x^2$

$= b^2 - a^2 - x^2 - 2ax + x^2$

$= b^2 - a^2 - 2ax.$

c) $x = c \times \cos(ABC)$.

d) $c^2 = b^2 - a^2 - 2ac \times \cos(ABC)$ ainsi

$b^2 = c^2 + a^2 + 2ac \times \cos(ABC)$.

2. $BC^2 = AC^2 + AB^2 + 2AC \times AB \times \cos(BAC)$ =196.

131 Vers la spécialité Maths

$\cos\left(AOB\right) = \cos\left(AOH\right) = \frac{OH}{OA}$,

d'où $OA \times OB \times \cos\left(AOB\right)$

$= OA \times OB \times \frac{OH}{OA} = OA \times OB$

132 Vers la spécialité Maths

1.a) $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

b)

$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

2. $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AT}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{9}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.

On en déduit que $\frac{5}{9}\overrightarrow{RT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{RS}$.

Les points R,S et T sont alignés.

Préparer le contrôle

Je me teste

p. 146

Objectif 1 Utiliser le projeté orthogonal

133 A, C et D **134** A et D

Objectif 2 Utiliser les caractéristiques des vecteurs

135 B et C **136** B et C

Objectif 3 Manipuler des sommes de vecteurs

137 C **138** A **139** C

Objectif 4 Utiliser

la colinéarité de vecteurs

140 C et D **141** C

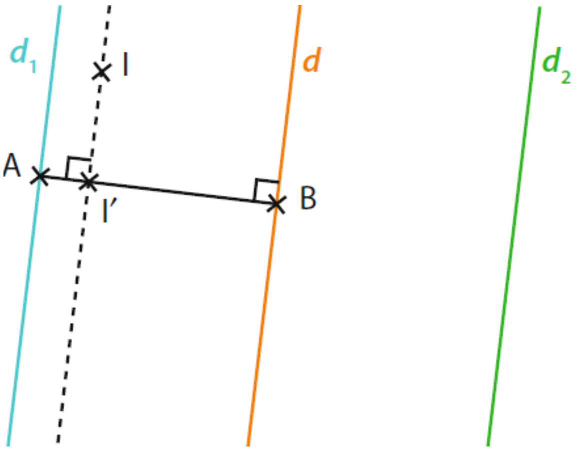
Préparer le contrôle

Je m'entraîne p. 147

Objectif 1 Utiliser le projeté orthogonal

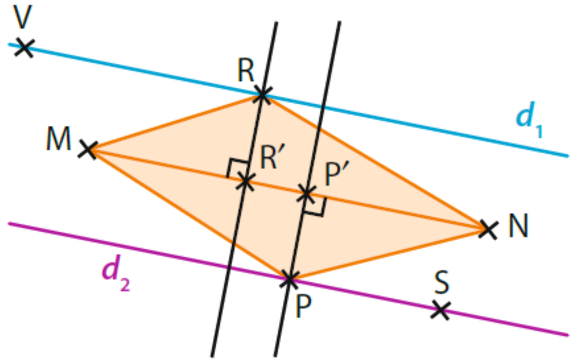
142 **1.** Le point B.

2. et **3.** On trace la perpendiculaire à (AB) passant par I, l'intersection avec (AB) donne I'.



143 **1.** et **2.** Les distances PP' et RR' sont égales.

3. On les choisit n'importe où sur d_1 la parallèle à (MN) passant par R ou sur d_2 la parallèle à (MN) passant par P.



144 $\mathcal{A}_{ACBD} = 2 \times \mathcal{A}_{ACD} = 2 \times \dfrac{CC' \times AB}{2} = CC' \times AB$

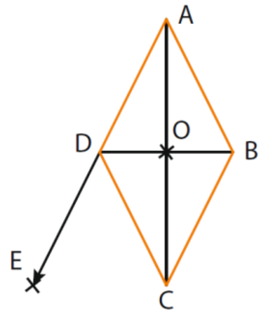
où C' est le projeté orthogonal commun à C et D. Cette aire est maximale lorsque CC' est maximale, c'est-à-dire lorsque $CC' = \dfrac{AB}{2}$ ce qui place C et D à l'intersection du cercle et de la médiatrice de $[AB]$.

Objectif 2 Utiliser

les caractéristiques des vecteurs

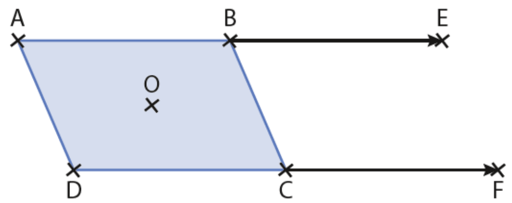
145 **1.** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$

2. Représentant $\overrightarrow{DE}$.

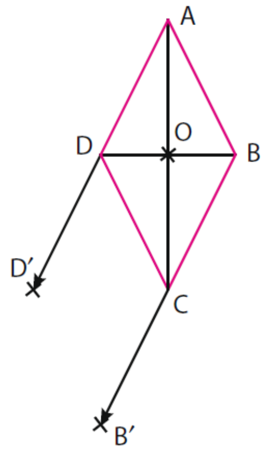


3. $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

146 **1.** et **2.** $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CF}$ donc BEFC est un parallélogramme.



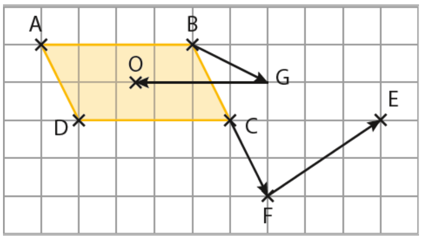
147 **1. 2. 3.** $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB'}$ donc DCB'D' est un parallélogramme. Alors $\overrightarrow{D'B'} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.



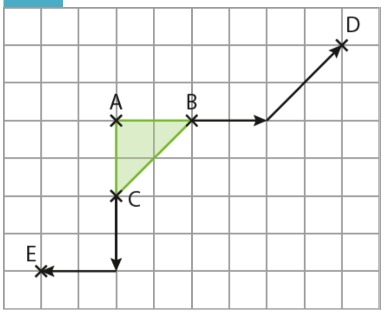
Objectif 3 Manipuler

des sommes de vecteurs

148 1. et 2.



149

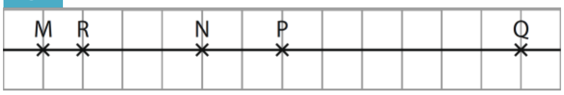


150 **a)** $\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{LJ}+\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{LJ}$.

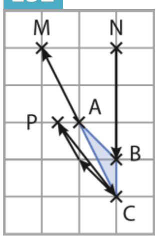
b) $\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{JL}=\overrightarrow{IL}+\overrightarrow{LK}+\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{IL}+\overrightarrow{JK}$.

Objectif 4 Utiliser la colinéarité de vecteurs

151



152

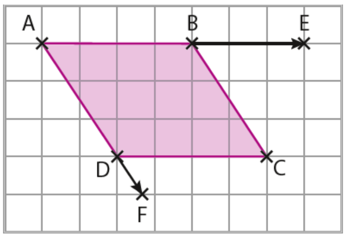


153 1. $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

2. $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$.

3. On constate que $\frac{3}{4}\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CE}$. Les vecteurs colinéaires donc les droites (BF) et (CE) sont parallèles.



Travaux pratiques

p. 148-149

1 Trouver le bon emplacement

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Utiliser une translation dans un problème de plus court chemin.

▶ B. Démonstration

2. AA'CM est un parallélogramme puisque $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MC}$. Ainsi AM = A'C.

3. **a)** AM = A'C et MC = A'A.

b) A'C + CB est minimale lorsque C se trouve sur la droite (AB). La position pour C est donc l'intersection de la droite (AB) avec la rive.

4. Notons MC et ND les points extrémités des deux ponts, les points C et D étant les plus près de B. À partir de A on effectue la translation de vecteur $\overrightarrow{MC}$ pour obtenir A'. Le trajet AMCDNB correspond au trajet A'CNDB et on retrouve la problématique précédente à appliquer pour le deuxième pont. Tracer alors A'' l'image de A' par la translation de vecteur $\overrightarrow{ND}$. On relie A'' et B avec un segment qui coupe la rivière en D de la rive la plus près de B : c'est l'endroit où on construit le premier pont. Soit N l'autre extrémité du pont. On construit la parallèle à (BD) passant par N. Cette parallèle coupe l'autre rivière en C, de la rive la plus près de B. C'est l'endroit où l'on doit construire l'autre pont.

2 Expression de l'aire d'un triangle

- **Durée estimée :** 15min
- **Objectif :** Travailler la trigonométrie pour exprimer l'aire d'un triangle.

1. $\mathcal{S} = \dfrac{a \times \text{AH}}{2}$

2. $\text{AH} = b \sin \text{C}$

3. $\mathcal{S} = \dfrac{a \times b \times \sin \text{C}}{2}$

4. $\mathcal{S} = \dfrac{a \times c \times \sin \hat{\text{B}}}{2}$

5. $\dfrac{2\mathcal{S}}{abc} = \dfrac{2a \times b \times \sin \text{C}}{2abc} = \dfrac{\sin \text{C}}{c}$ et

$\dfrac{2\mathcal{S}}{abc} = \dfrac{2a \times c \times \sin \hat{\text{B}}}{2abc} = \dfrac{\sin \hat{\text{B}}}{b}$

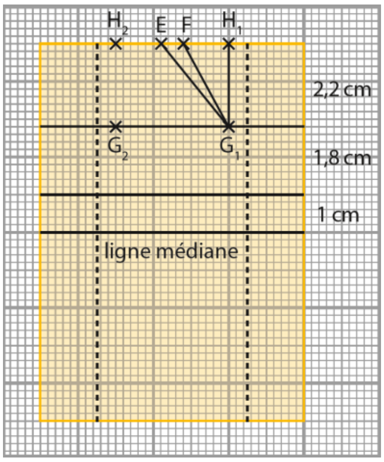
De même $\dfrac{2\text{S}}{\text{abc}} = \dfrac{2\text{b} \times \text{c} \times \sin\hat{\text{A}}}{2\text{abc}} = \dfrac{\sin\hat{\text{A}}}{\text{a}}$.

$\dfrac{2\mathcal{S}}{abc} = \dfrac{2b \times c \times \sin \text{A}}{2abc} = \dfrac{\sin \text{A}}{a}$

3 Distance et angle

- **Durée estimée :** 20min
- **Objectif :** Utiliser le projeté orthogonal et des calculs de distance pour évaluer un angle de tir.

1. À l'échelle 1/1 000e une longueur de 1cm sur le dessin représente 1 000 cm de la réalité soit 10 m.



2. Le joueur peut avoir deux positions possibles G1 et G2 : à l'intersection de la ligne des 22(celle du haut) et à 20m d'un des bords du terrain.

3. EH1=18m, FH1=12m.

$\text{GF}^2 = \text{GH}^2 + \text{HF}^2 = 22^2 + 12^2 = 628$

$\text{GF} = \sqrt{628} \approx 25{,}06\,\text{m}$

et $\text{GE} = \sqrt{808} \approx 28{,}43\,\text{m}$.

4. $\sin \text{HGF} = \dfrac{\text{HF}}{\text{FG}} = \dfrac{12}{\sqrt{628}}$ on en déduit

$\text{HGF} \approx 28{,}61°$ et de même

$\text{HGE} \approx 39{,}29°$ donc $\text{EGF} \approx 11°$.

5. Par calcul on obtient

$-0{,}002 \times 55^2 + 1{,}19 \times 55 = 4{,}95 > 3$ donc la pénalité est réussie.

Le ballon retombe lorsque

$-0{,}002 \times x^2 + 1{,}19 \times x = 0$ =0 soit

$x(-0{,}002 \times x + 1{,}19)$ =0 soit $x = 0$ ou $x = 59{,}5$.

Le ballon retombe donc à 59,5 m du joueur.

4 Définition vectorielle des homothéties

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** reformuler vectoriellement la définition des homothéties et prouver quelques propriétés.

▶ A. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique

Les vecteurs sont colinéaires.

▶ B. Redéfinir une homothétie avec les vecteurs

1. et 2. Par définition de l'homothétie de rapport k, les vecteurs $\overrightarrow{\text{OM'}}$ et $\overrightarrow{\text{OM}}$ sont de même direction , de sens opposé ou non selon le signe de k et de longueur multipliée par k ou $-k$ donc on a $\overrightarrow{\text{OM'}} = k \times \overrightarrow{\text{OM}}$.

▶ C. Étude d'égalités vectorielles dans une homothétie

1. $\overrightarrow{\text{A'B'}} = 2\overrightarrow{\text{AB}}$

2.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{A'B'}} &= \overrightarrow{\text{A'O}} + \overrightarrow{\text{OB'}} \\ &= -\overrightarrow{\text{OA'}} + \overrightarrow{\text{OB'}} \\ &= -2\overrightarrow{\text{OA}} + 2\overrightarrow{\text{OB}} \\ &= 2\overrightarrow{\text{AO}} + 2\overrightarrow{\text{OB}} \\ &= 2\overrightarrow{\text{AB}}\end{aligned}$$

3.a) Il semble que oui.
b) Les points A, B et C alignés signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$.
sont colinéaires , soit qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AC} = t\,\overrightarrow{AB}$.
c) $\overrightarrow{A'C'} = 2\overrightarrow{AC} = 2t\,\overrightarrow{AB} = t \times 2\overrightarrow{AB} = t\,\overrightarrow{A'B'}$.
Donc A', B' et C'sont alignés.
4. Même démonstration en remplaçant 2 par k .

Chapitre 6 Vecteurs et repère

↪Manuel p.151-175

Commentaires pédagogiques

Ce chapitre regroupe l'ensemble des éléments du programme relatif aux calculs dans un repère.
Il nécessite que les élèves maîtrisent le chapitre 5 – géométrie non repéré avant de commencer ce chapitre. Les élèves maîtrisent du collège le repérage d'un point.
Le plan du cours se veut rigoureux en définissant d'abord la base d'un plan puis les coordonnées d'un vecteur avant de définir le repère puis les coordonnées d'un point.
Le calcul sur les coordonnées de vecteurs est ensuite introduit comme la détermination des coordonnées du milieu d'un segment et la longueur d'un segment. Enfin, la condition de colinéarité de deux vecteurs est établie.
Le chapitre se termine par des exercices résolus par les deux méthodes étudiées dans les deux chapitres : géométrique et analytique.

Les capacités mises en jeu dans ce chapitre sont :

- Représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées. Lire les coordonnées d'un vecteur.
- Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel.
- Calculer la distance entre deux points. Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
- Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.
- Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.

Corrigés des activités et des exercices

Pour prendre un bon départ p. 151

1 Lire des coordonnées

1. $C(0;4)$ et $D(-3;0)$ et $E(3;-1)$

2. G

2 Effectuer des calculs

a) -8	**b)** 2
c) -23	**d)** 1,5
e) 0	**f)** 33
h) 65	**g)** $\frac{5}{6}$

3 Reconnaître des tableaux de proportionnalité

a) Oui. Coefficient : -1,5

b) Non

c) Oui. Coefficient : $\frac{1}{\sqrt{2}}$

d) Non

4 Reconnaître des vecteurs égaux

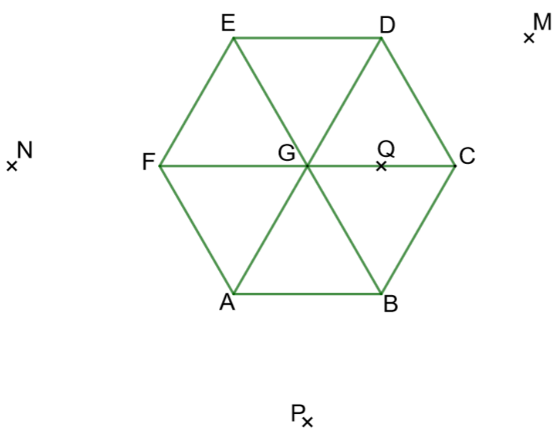
Les égalités vraies sont **a)**, **c) d)** et **f)**

5 Effectuer des opérations sur les vecteurs

a) $\overrightarrow{FD}$	**b)** $\overrightarrow{EB}$	**c)** $\overrightarrow{FB}$
d) $\overrightarrow{CF}$	**e)** $\overrightarrow{FG}$	**f)** $\overrightarrow{GD}$

6 Construire des vecteurs

1. à **5.**



Activités p. 152-153

1 Des coordonnées de points aux coordonnées de vecteurs

• **Durée estimée :** 30 min

• **Objectif** : Définir les coordonnées d'un vecteur à partir des coordonnées d'un point, déjà connu par les élèves

1. $A(-6;0)$, $B(5;-1)$ $C(1;1)$, $D(1;-6)$,

$E(0;4)$, $G\left(-\frac{3}{2};-\frac{7}{2}\right)$, $H\left(1;-\frac{7}{2}\right)$

2. $x=4$ et $y=5$

3. a) $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}4\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}0\\ \frac{9}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}$

b) Il semble qu'il s'agit de soustraire les abscisses en commençant par l'abscisse du point extrémité.

c) $x_C - x_A = 1+6 = 7$

$y_C - y_A = 1-0 = 1$

Donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$

4. a) Les deux vecteurs sont opposés.

L'abscisse de $\overrightarrow{EA}$ est l'opposé de l'abscisse de $\overrightarrow{AE}$.

b) $\overrightarrow{ID} = -6\overrightarrow{IC}$.

L'abscisse de $\overrightarrow{ID}$ est égale au produit de -6 par l'abscisse de $\overrightarrow{IC}$.

c) $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{HE}$

L'abscisse de $\overrightarrow{HE}$ est la somme de l'abscisse de $\overrightarrow{HB}$ et de $\overrightarrow{BE}$.

d) Voir la dernière propriété du cours p. 154 du manuel de l'élève.

2 Milieu et longueur d'un segment à partir de coordonnées

• **Durée estimée :** 15 minutes

• **Objectif :** Établir les coordonnées d'un milieu d'un segment et la longueur d'un segment à partir des coordonnées de ses extrémités.

c)

4. Il semble que l'abscisse de K est la moyenne des abscisses de A et B.

5. a) ABC est rectangle en A.

b) $AC=6$ et $BC=2$

$AB=\sqrt{40}$ car $AB^2=AC^2+BC^2$

c) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$

ce qui correspond aux longueurs AC et BC aux signes près.

Ainsi $AB^2=(x_{\overrightarrow{AB}})^2+(y_{\overrightarrow{AB}})^2$

Soit $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

6. $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AK}$

D'où $x_K=\frac{x_A+x_B}{2}$ et $y_K=\frac{y_A+y_B}{2}$

7. $AB^2=AH^2+HB^2$ car le triangle HAB est rectangle en H.

Comme (AH)//(O $\vec{i}$), la longueur AH est égale à la valeur absolue de l'abscisse de $\overrightarrow{AH}$.

$$AH^2=(x_H-x_A)^2$$

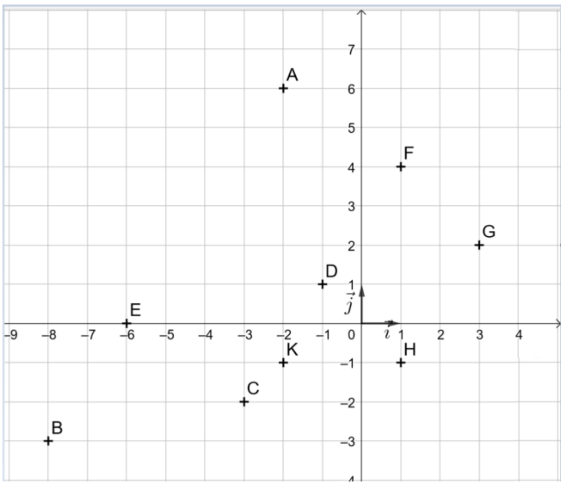
De même $BH^2=(y_H-y_A)^2$

D'où la formule

3 Condition de colinéarité

• **Durée estimée :** 15 minutes

• **Objectif :** Découvrir la condition de colinéarité de deux vecteurs à partir de leurs coordonnées.



2. b) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{GH}$

Vecteur	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AE}$	$\overrightarrow{CD}$	$\overrightarrow{CF}$	$\overrightarrow{GH}$	$\overrightarrow{GK}$
1re coordonnée	-6	-4	2	4	-2	-5
2e coordonnée	-9	-6	3	6	-3	-3

3. Il y a des coefficients de proportionnalité évidents entre les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GH}$.

4. $\overrightarrow{AE}=-2\overrightarrow{CD}$ $\quad$ $\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{CD}$ $\quad$ $\overrightarrow{GH}=-\overrightarrow{CD}$

5. Comme il y a des coefficients de proportionnalité entre colonne, on pense aussi aux produits en croix. Ils sont égaux dès lors que les vecteurs sont colinéaires.

6. Voir le cours p. 156 du manuel de l'élève pour $x'\neq 0$ et $y'\neq 0$

Si $x'=0$ ou $y'=0$ alors :

• le vecteur $\vec{v}$ est parallèle à un des axes du repère et il est donc colinéaire à un vecteur parallèle aux mêmes axes du repère. Ainsi, $x=0$ ou $y=0$ et la condition est vérifiée.

• si la condition est vérifiée, $xy'-x'y=0$ signifie que $xy'=0$ ou $x'y=0$ et on en déduit que $x=0$ ou $y=0$ et donc $\vec{u}$ est parallèle au même axe que $\vec{v}$, ils sont donc colinéaires.

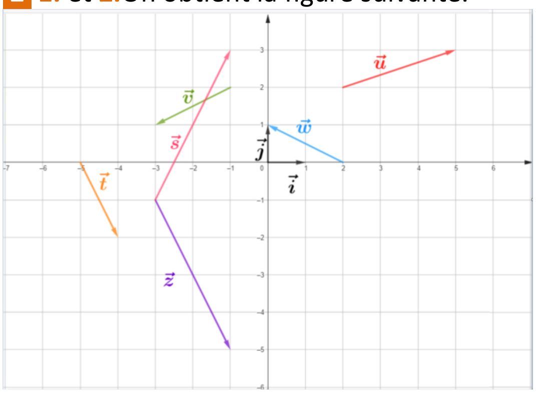
Exercices résolus

À vous de jouer p. 155

1 $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

2 **1.** et **2.** On obtient la figure suivante.



3. $\vec{t}$ et $\vec{z}$ sont colinéaires

3 **a)** $-\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix}$

c) $3\vec{u}-2\vec{v}\begin{pmatrix}-16\\1\end{pmatrix}$

4 **a)** $-\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$

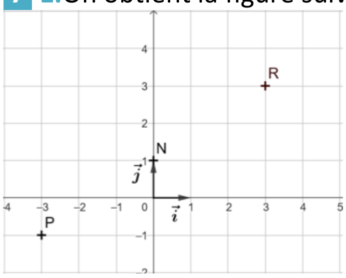
b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$

5 $AB=\sqrt{13}$

6 $AB=\sqrt{20}$, $AC=\sqrt{5}$ et $BC=5$

7 **1.** On obtient la figure suivante.

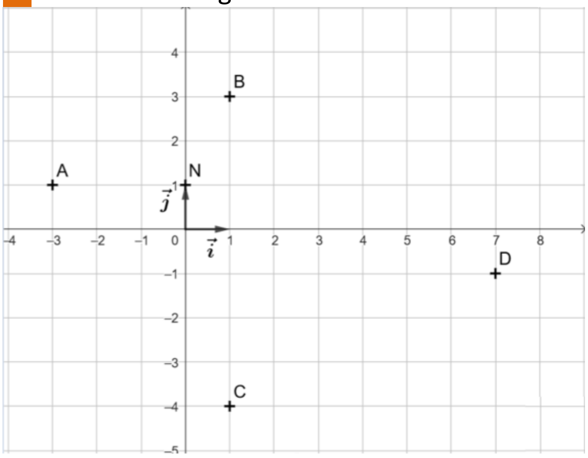


2.

$\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$

$3\times 4-6\times 2=0$ donc $\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont colinéaires et les points sont alignés.

8 On obtient la figure suivante.



2. . $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$

$4\times3-6\times2=0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$

$4\times(-4)-6\times(-5)\neq0$ donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas colinéaires et les droites (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.

9 **1.** $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+5\\y+2\end{pmatrix}$ donc $M(-8;0)$

2. $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}x+5\\y+2\end{pmatrix}$ donc $N(4;-8)$

10 $E(3;45)$

11 $H(-5;-5)$

Exercices résolution de problèmes

p.159

L'objectif ici est d'émettre une conjecture en géométrie en s'appuyant sur les deux reflexes : s'appuyer sur un ou des exemples et reconnaître une configuration.

- Le 1er exercice est un exercice identique à l'exemple.
- Le 2e exercice est un triangle quelconque qui ressemble à un triangle rectangle. Ainsi, il s'agit d'un exemple où la démonstration invalide une conjecture et c'est l'occasion de reprendre les différences de concept entre exemple, conjecture, hypothèse, conclusion et démonstration en faisant un parallèle avec les sciences expérimentales. .
- Le 3e exercice fait appel à la connaissance de l'organigramme des quadrilatères présents dans les rabats. Il sera intéressant de noter auprès des élèves les difficultés à énoncé correctement la conjecture compte tenu de l'imprécision de l'énoncé.

12 Les quatre points semblent appartenir au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{8}$

13 Le triangle ABC semble être un triangle rectangle.

14 Le quadrilatère convexe ABDC ou ACDB semble être un losange.

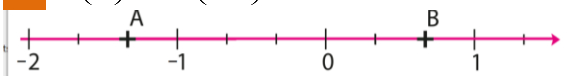
Exercices automatismes

p.160

Rituel 1

15 $E\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$; $F\begin{pmatrix}11\\3\end{pmatrix}$

16 $G\left(\frac{2}{3}\right)$ et $H\left(-\frac{4}{3}\right)$



17 **a)** $X=-\frac{1}{2}$ **b)** $A=0$

18 EF = 12

19 $BC^2 = 36$ et $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, le triangle ABC n'est pas rectangle d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

Rituel 2

20 $A\left(\frac{3}{5}\right)$ et $B\left(\frac{13}{5}\right)$

21 **a)** $\mathcal{S}=\{0\}$ **b)** $\mathcal{S}=\left\{\frac{13}{8}\right\}$

22 Le quadrilatère rouge est un losange.
Le quadrilatère bleu est un carré et le vert est un parallélogramme.

Rituel 3

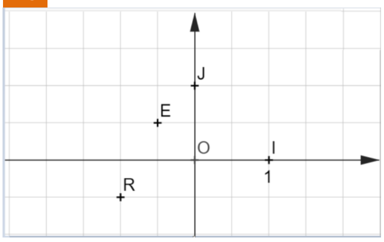
23 **a)** $M(-2;1)$ **b)** $A(2;1)$ **c)** $B(-2;-1)$

24 **a)** $\mathcal{S}=\{1\}$ **b)** $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{9}{8}\right\}$

25 $\dfrac{AT}{AS}=\dfrac{5}{8}$ et $\dfrac{AC}{AR}=\dfrac{3,5}{5,8}=\dfrac{5}{8}$ donc $\dfrac{AT}{AS}=\dfrac{AC}{AR}$
et les droites (TC) et (SR) sont parallèles d'après le théorème de Thalès.

Rituel 4

26



27 288π

28 $R=\dfrac{200}{33}$

29 $MN=0,7$

Exercices d'entraînement p. 161-167

Je consolide mes acquis

30 Régionnement du plan

Bleu : A, F
Vert: C, E
Orange : B, C

31 Abscisse et ordonnée

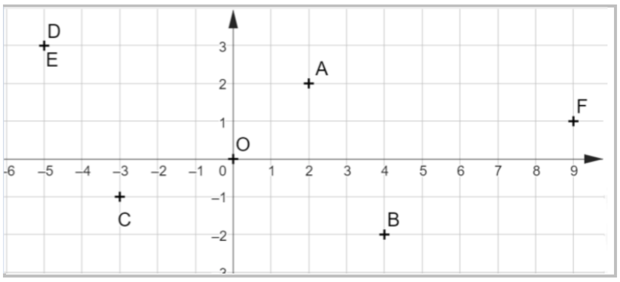
1. $A(4;1)$ **2.** $D(1;4)$
3. $B(-2;1)$ **4.** $E(1;-2)$

32 Coordonnées de points

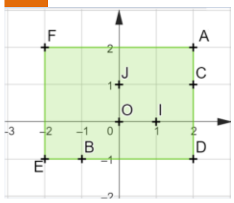
$A\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ $B(-1,3;1,5)$
$C(-1,9;-0,3)$ $D(2;-0,4)$
$E(1,5;0)$ $F(-1,5;0)$
$G(1,8;0,7)$ $H(-0,7;-0,7)$

33 Constructions et coordonnées

1. $A(2;2)$ $B(4;-2)$ $C(-3;-1)$
2. $D(-5;3)$
3. $E(9;1)$
4. E et F sont confondus.



34 Coordonnées



35 **1.** $(-5;3)$ puis $(2;-3)$.
2. À partir des coordonnées d'un point, il détermine les coordonnées du symétrique de ce point par rapport à l'axe des abscisses.
3. Rajouter « mettre y à -1*y » avant la 1re commande « dire »

Questions de cours

36 $\overrightarrow{OM}$

37 L'abscisse de la somme de deux vecteurs est la somme des abscisses des deux vecteurs. Idem pour l'ordonnée.

38 $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

39 On calcule $xy'-x'y$. Les deux vecteurs sont colinéaires si cette différence est nulle.

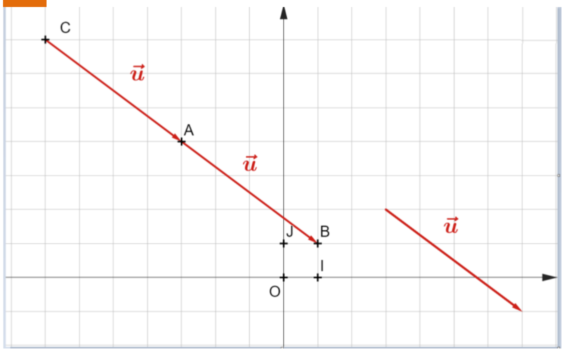
Lecture graphique

40 $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$
$\vec{r}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

41 **a)** $A(1;2)$ **b)** $B(2;1)$ **c)** $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$

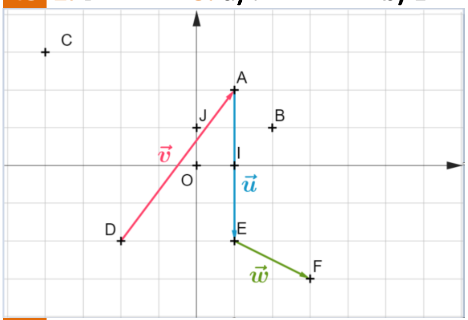
d) $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$ **e)** $\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix}-7\\6\end{pmatrix}$ **f)** $\overrightarrow{DO}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

42 **1.** et **2.**

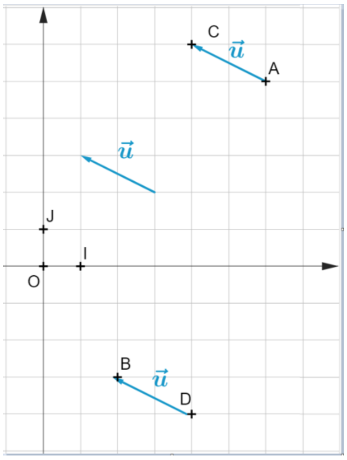


3. A est le milieu de [BC] car $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}$, les deux vecteurs ont les mêmes coordonnées.

43 **2.** D **3. a)** F **b)** E



44 **1.** et **2.**

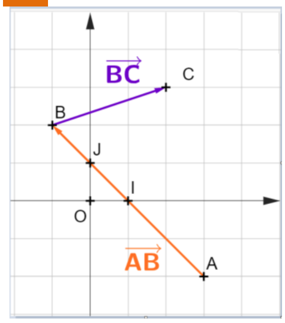


3.a) $C(4;6)$ et $D(4;-4)$

b) $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}0\\10\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-2\\-9\end{pmatrix}$

Coordonnées d'un vecteur par le calcul

45



$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

46 $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-8\end{pmatrix}$

47 $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$

48 **1.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-1\\-6\end{pmatrix}$

2. ABCD est un parallélogramme.

49 Par exemple $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GH}$ donc EFHG est un parallélogramme.

50 $\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{NA}\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EL}=\overrightarrow{NA}$ donc ELAN est un parallélogramme.

51 $\overrightarrow{RN}\begin{pmatrix}11\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}11\\9\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{RN}\neq\overrightarrow{MP}$ donc MPNR n'est pas un parallélogramme.

52 **2.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EL}=\overrightarrow{NA}$

donc ELAN est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.

3. $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CI}$ et C est le milieu de [DI].

4. Analyse : si C est l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ alors $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{BA}$.

Démonstration : $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{BA}$.

Coordonnées d'une expression vectorielle

53 **1.** $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

4. $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $\vec{u}+\vec{w}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$

$\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ $\vec{u}-\vec{w}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

54 **4.** $2\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\12\end{pmatrix}$ $-3\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$ $\frac{1}{3}\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ $\frac{3}{2}\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

55 **1.** $A(1;1)$ $B(3;4)$ $C(-4;3)$

$D(-2;-2)$ $E(1;-2)$ $F(3;0)$

$G(-2;4)$

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FA}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$

3. $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix}$

56 $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$ $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}$ $-2\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$

57 $3\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\15\end{pmatrix}$ $-4\vec{u}\begin{pmatrix}8\\-20\end{pmatrix}$

$\frac{2}{3}\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\\frac{10}{3}\end{pmatrix}$ $-\frac{9}{2}\vec{u}\begin{pmatrix}9\\-\frac{45}{2}\end{pmatrix}$

58. **1.** $2\vec{u}\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$ $-\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ **2.** $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$

59 $\vec{w}\begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}$ $\vec{m}\begin{pmatrix}3\\-8\end{pmatrix}$ $\vec{z}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

60 **a)** $\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\-1\end{pmatrix}$

c) $-3\vec{u}\begin{pmatrix}15\\-18\end{pmatrix}$ **d)** $-3\vec{u}+\vec{w}\begin{pmatrix}20\\-29\end{pmatrix}$

e) $3\vec{v}+2\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\33\end{pmatrix}$ **f)** $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}\begin{pmatrix}-7\\24\end{pmatrix}$

61 $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}9\\18\end{pmatrix}$ et $2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-11\end{pmatrix}$

62 $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\-\frac{29}{2}\end{pmatrix}$

Coordonnées du milieu

63 $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

64 **a)** $C\left(\frac{3}{2};1\right)$ **b)** $C\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$

65 $\left(2;-\frac{3}{2}\right)$

66 **1. a)** $I(-4;1)$ **b)** $J\left(-\frac{9}{2};2\right)$ **c)** $K\left(-\frac{7}{2};0\right)$

2. Les coordonnées du milieu de [JK] sont $(-4;1)$.

C'est donc le point I.

67 **Histoire des maths**

1. $\left(-3;\frac{3}{2}\right)$

2. Les coordonnées du milieu de [AT] sont $\left(-3;\frac{3}{2}\right)$.

Ainsi, [AT] et [PR] ont le même milieu et on en déduit que PART est un parallélogramme.

68 **1. a)** $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ **b)** $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$

2. ABCD est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu.

69 **1.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.

2. E est le milieu de [AC] donc $E\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.

70 C est le milieu de [AB] donc $C\left(\dfrac{3}{2};0\right)$.

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7\\12\end{pmatrix}$ **b)** $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\-6\end{pmatrix}$ **c)** $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\-6\end{pmatrix}$

Norme et longueur

71 • $\|\vec{u}\|=5$
• $\|\vec{v}\|=10$
• $\|\vec{w}\|=\sqrt{26}$
• $\|\vec{m}\|=\sqrt{58}$
• $\|\vec{n}\|=5$

72 $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7\\2\end{pmatrix}$ et $AB=\sqrt{53}$

73 **a)** $\sqrt{45}$
b) $\sqrt{26}$
c) $\sqrt{68}$
d) $\sqrt{\dfrac{341}{36}}$
e) $\sqrt{\dfrac{193}{144}}$

74 $p=\sqrt{80}+\sqrt{45}+\sqrt{125}$

75 **1.** $FI=\sqrt{13}$ $FL=\sqrt{130}$
$IL=\sqrt{117}$

2. $FI^2+IL^2=13+117=130$

Donc $FI^2+IL^2=FL^2$ et le triangle FIL est rectangle en I.

76 **1.** $DE=\sqrt{13}$ $EF=\sqrt{13}$ $DF=4$

2. DEF est isocèle en E.

77 **1.** $AB=\sqrt{13}$ $AC=\sqrt{13}$ $BC=\sqrt{52}$

2. $BC=\sqrt{13\times 4}=2\sqrt{13}=AB+AC$

A, B et C sont alignés d'après l'inégalité triangulaire.

78 **Analyser un problème**

1. On conjecture que TAR est un triangle isocèle en R.

$TR=\sqrt{68}$ et $AR=\sqrt{68}$ ce qui prouve la conjecture.

2. On conjecture que le triangle ARD est rectangle en R.

$RD^2=17$ $RA^2=68$ $AD^2=85$

On a $RD^2+RA^2=AD^2$ ce qui prouve la conjecture.

79 **1.** $HU^2=81$ $HM^2=36$ $MU^2=117$

Donc $HU^2+HM^2=MU^2$ donc le triangle HUM est rectangle en H.

2. $\sin(HUM)=\dfrac{HM}{UM}=\dfrac{6}{\sqrt{117}}$

3. $HUM\approx 33,69°$ $HMU\approx 56,31°$

80 $ACB\approx 63,43°$

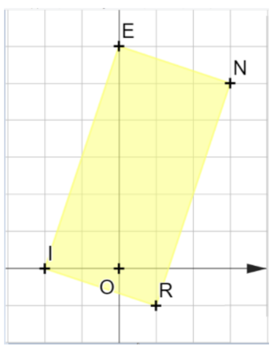
81 **1.** $AC=5$, $AH=4$ et $CH=3$
$HB=6$, $AH=4$ et $BC=\sqrt{45}$

2. $CAH\approx 36,87$ et $CBH\approx 26,57°$

3. La somme des angles d'un triangle est égale à 180° donc $ACB\approx 48°$.
Aucun angle n'est égal à 90°.

82 **Émettre une conjecture**

1. On obtient la figure ci-contre

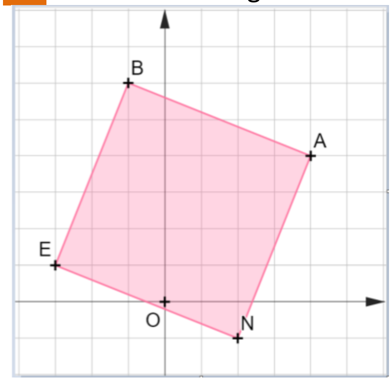


2. RIEN semble être un rectangle.

3. $\overrightarrow{EN}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IR}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ donc RIEN est parallélogramme.

$EN^2=10$ $NR^2=40$ $ER^2=50$

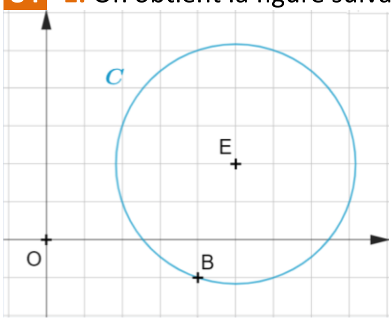
83 **1.** On obtient la figure suivante.



2. BANE semble être un carré.

3. $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EN}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ donc BANE est un parallélogramme. $AN^2 = AB^2 = 29$ donc BANE est un losange. $BN^2 = 58 = AN^2 + AB^2$ donc BAN est un triangle rectangle en A et BANE est un rectangle (ou démontrer que BN=AE) BANE est donc un carré.

84 **1.** On obtient la figure suivante.



2. $EB = \sqrt{10}$

3. $EA = \sqrt{10}$ donc A appartient au cercle de centre E de rayon $\sqrt{10}$.

85 **a)** Oui **b)** Non car $IB^2 = 26$
c) Oui **d)** Oui

86 **1.** $AB = \sqrt{5}$. On note $\mathcal{D}$ le disque de centre A passant par B.

$AC = 1$ donc $AC < \sqrt{5}$ et $C \in \mathcal{D}$

$AE = \sqrt{10}$ et $AE > \sqrt{5}$ et $E \notin \mathcal{D}$

$AD = \sqrt{5}$: $D \in \mathcal{D}$

$AF = 2$ et $2 < \sqrt{5}$ donc $F \in \mathcal{D}$

$AG = \dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{3}{2} < \sqrt{5}$ donc $G \in \mathcal{D}$

$AH = \dfrac{\sqrt{18}}{2}$ et $AH < 5$ donc $H \in \mathcal{D}$

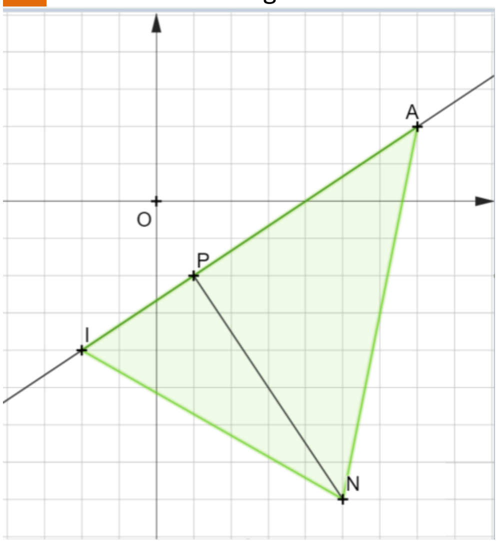
2. L'ordonnée de A est négative et le rayon du cercle $\sqrt{5}$ est inférieure à la distance de A à l'axe des abscisses donc toute la surface du disque est située en-dessous de l'axe des abscisses. Un point d'ordonnée positive sera situé au-dessus de l'axe des abscisses et donc ne peut appartenir au disque.

87 **1.** $AB^2 = 85$, $BH^2 = 5$ et $AH^2 = 80$ donc $AB^2 = BH^2 + HA^2$ et ABH rectangle en H.
$AC^2 = 125$, $HC^2 = 45$ et $AH^2 = 80$ donc $AC^2 = AH^2 + HC^2$ et AHC est rectangle en H.

2. (AH) est perpendiculaire à (BH) et (HC) et il n'existe qu'une seule droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné donc (AH) est perpendiculaire à (BC) et c'est la hauteur issue de A du triangle ABC.

3. $\mathcal{A} = 40$

88 **1.** On obtient la figure suivante.

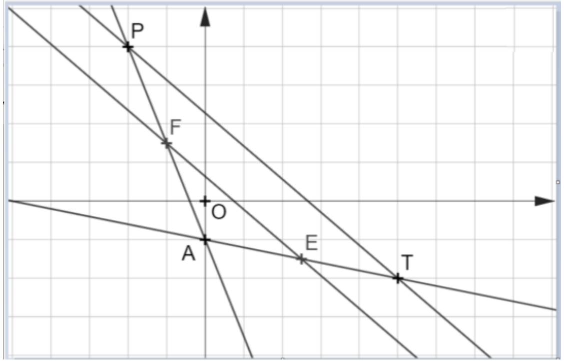


2. $\overrightarrow{IP}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IP}$ et les points I, P et A sont alignés. Il suffit de démontrer que les droites (IP) et (PN) sont perpendiculaires. $IP^2 = 13$, $PN^2 = 52$ et $IN^2 = 65$ donc $IN^2 = IP^2 + PN^2$.

3. $\mathcal{A} = \dfrac{\sqrt{117} \times \sqrt{52}}{2} = 39$

4. $\dfrac{\sqrt{117} \times \sqrt{52}}{2} = \dfrac{h \times IN}{2}$ donc $h = \dfrac{78}{\sqrt{65}}$.

89 On obtient la figure suivante.



F est le milieu de [AP] d'après le théorème de Thalès donc $F\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$.

90 **1.** Oui car $AC=5$

2. non car $BJ\neq BO$

3. $AB^2=125$, $AC^2=25$ et $BC^2=100$ donc $AB^2=AC^2+CB^2$ et ABC est rectangle en C. Il n'est pas isocèle.

4. $AD=DJ=\sqrt{22}$ donc AJD est isocèle en D, il ne peut être rectangle car $AJ=\sqrt{8}$

91 **1. a)** $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QP}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

b) MNPQ est un parallélogramme.

2. a) $\left\|\overrightarrow{MN}\right\|=\sqrt{34}$, $\left\|\overrightarrow{NP}\right\|=\sqrt{34}$ et $\left\|\overrightarrow{MP}\right\|=\sqrt{68}$

b) Le triangle MNP est isocèle rectangle en M. Le parallélogramme MNPQ a deux côtés consécutifs de même longueur et un angle droit c'est donc un carré.

3. a) Attention : dans l'énoncé il faut lire le repère $(M;\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MQ})$. Le repère $(M;\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MQ})$ est orthogonal mais pas orthonormé car la norme des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MQ}$ n'est pas égale à 1.

b) La base $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MQ})$ n'est pas orthonormée.

92 **1.** Le triangle ABC est rectangle en B avec $AB^2=100$, $BC^2=25$ et $AC^2=125$.

2. $p=15+\sqrt{125}$

3. $\mathcal{A}=25$

4. $\tan ACB=\dfrac{5}{\sqrt{125}}$

5. $ACB\approx 53{,}13°$

93 **Décomposer un problème**

1.

```
from math import *
def norme(xA, yA, xB, yB) :
        N=sqrt((xB-xA)*(xB-xA)+(yB-yA)*(yB-yA))
        return N
```

2.

```
xA=float(input("abscisse de A ?"))
yA=float(input("ordonnée de A ?"))
xB=float(input("abscisse de B ?"))
yB=float(input("ordonnée de B ?"))
xC=float(input("abscisse de C ?"))
yC=float(input("ordonnée de C ?"))
xD=float(input("abscisse de D ?"))
yD=float(input("ordonnée de D ?"))
a=norme(xA, yA, xB, yB)
b=norme(xB,yB,xC,yC)
c=norme(xC, yC, xD, yD)
d=norme(xD,yD,xA,yA)
if a==b==c==d :
   print("ABCD est un losange")
else :
   print(" ABCD n'est pas un losange ")
```

94 **2.** Les points d'abscise 2 se situent sur la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de coordonnée (0 ; 2)

3. $OA^2=5$ et $OM^2=4+y^2$ donc $M(2;1)$ et $M(2;-1)$. Il y a donc deux points M possibles.

4. $AM^2=25$ signifie $(y+2)^2=16$
$M(2;2)$ ou $M(2;-6)$

5. $IM^2=JM^2$ puis $M(2;2)$.

6. Un seul point $M(2;2)$.

95 **1. Attention:** il faut lire D(-1;-3) dans l'énoncé**.** ABCD semble être un carré

2. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et ABC est un triangle rectangle isocèle en B . On a $AB^2=16$, $BC^2=16$ et $AC^2=32$.

3. $O(1;-1)$

4. a) (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$)
b) (D, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$)
c) (O ; $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}$)

5. a) $A(0;1)$, $B(1;1)$, $C(1;0)$, $D(0;0)$, $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

b) $A(0;0)$, $B(0;1)$, $C(1;1)$, $D(1;0)$, $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

c) $A(0;-1)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$, $D(-1;0)$, $O(0;0)$

Colinéarité

96 **1. a)** 0 **b)** 56 **c)** -18 **d)** 0 **e)** 5

2. Pour **a)** et **d)** les vecteurs sont colinéaires

a) $\vec{v}=-\frac{1}{2}\vec{u}$ **d)** $\vec{w}=\frac{-8}{3}\vec{v}$

97 **a)** $\overrightarrow{GF}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{GF},\overrightarrow{DE}\right)=0$ donc $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.

b) $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{EG},\overrightarrow{FD}\right)=0$ donc $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont colinéaires.

c) $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{DG}\right)=12+8=20\neq 0$ donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DG}$ ne sont pas colinéaires.

d) $\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{GE},\overrightarrow{DG}\right)=-10-4=-14\neq 0$ donc $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{DG}$ ne sont pas colinéaires.

98 **a)** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=10-9=1\neq 0$ donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=0$ donc les droites(AB) et (CD) sont parallèles.

c) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=-10+12=2\neq 0$ donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

99 **a)** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=0$ donc les points A, B et C sont alignés.

b) $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{EF}\right)=0$ donc les points D, E et F sont alignés.

c) $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HI}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{GH},\overrightarrow{HI}\right)=5-6=-1\neq 0$ donc les points G, H et I ne sont pas alignés.

100 **a)** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=0$ donc le point C appartient à la droite (AB).

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=0$ donc le point C appartient à la droite (AB).

c) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=5-6=-1\neq 0$ donc le point C n'appartient pas à la droite (AB).

101 **a)** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{5}{3}+\frac{4}{9}=\frac{19}{9}\neq 0$ donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

b) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{8}{9}\neq 0$ donc les droites (BC) et (AD) ne sont pas parallèles.

102 $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-9\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$. Les vecteurs sont colinéaires mais pas de même longueur dont le quadrilatère ADCD est un trapèze.

103 **1.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-12\\14\end{pmatrix}$

2. $k=-\frac{1}{2}$

104 $\overrightarrow{MR}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{-13}{8}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ER}\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\\-\frac{9}{2}\end{pmatrix}$

Les points ne sont pas alignés.

105 **a)** $y=-2$ **b)** $y=4$

106 **1.** Le repère $\left(A;\vec{i},\vec{j}\right)$ est orthonormé.

2. $A(0;0)$; $B(1;0)$, $D(0\,;1)$

3. a) $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

b) $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

4. $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc $E\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$

5. $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc $F\left(1;\frac{1}{2}\right)$

6. Les vecteurs $\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OF}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ sont colinéaires. Les points O, E et F sont donc alignés

107 **2.** Les droites (CE) et (AB) semblent parallèles.

3. $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$, $E(2;1)$

4. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires donc les droites (CE) et (AB) sont parallèles. La conjecture est donc vérifiée.

Détermination des coordonnées d'un point

108 $B(3;5)$

109 $B(1;1)$ et $C(-7;7)$

A est le milieu de [BC]

110 $A(4\,;-10)$

111 $H(6;-1)$

112 **1.** $D(-1;1)$

2. $AB^2=AD^2=13$

113 $B(-3;8)$

114 $M(7;-3)$

115 $C(11;-16)$

116 $C\left(-\frac{277}{36},\frac{363}{200}\right)$

117 **1.** $3\overrightarrow{LA}\begin{pmatrix}-3\\-15\end{pmatrix}$ et $-2\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$

2. $G(-8;-15)$

118 $Q(-17\,;7)$

119 $G\left(\frac{1}{4};1\right)$

120 Esprit critique

$2\overrightarrow{MJ}+3\overrightarrow{MK}=5\overrightarrow{ML}$ équivaut à $\overrightarrow{JK}=\frac{5}{2}\overrightarrow{JL}$. Les points J, K et L ne sont pas alignés, M n'existe pas.

121 Vérifier un résultat

a) $M(0;3)$ **b)** $P(2\,;0)$

122 **1.** $P(-5\,;-8)$ et $Q(-14\,;-2)$

2. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-9\\6\end{pmatrix}$ sont colinéaires

123 **3.** $U\left(3;\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CU}\begin{pmatrix}-3\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Les droites (AB) et (OU) sont parallèles.

124 **2. a)** $CA=5$, $BC=5$ et $AB=\sqrt{50}$

b) ABC est rectangle isocèle en C.

3. $D(0;8)$

4. CBDA est un carré

5. $S(-6\,;0)$

6. $R(-2\,;-3)$

7. $\overrightarrow{AR}=2\overrightarrow{BS}$, ABSR est un trapèze rectangle.

8. $\mathcal{A}=37{,}5$

125 **1.** $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires, les droites (BC) et (AD) sont parallèles.

2. $I\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ et $K\left(\frac{3}{4};\frac{9}{4}\right)$

3. $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\-\frac{11}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}-\frac{5}{4}\\-\frac{11}{4}\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires et on un point commun dont les points AI et K sont alignés.

126 **1.** ABCD est un trapèze.

2. $I\left(-23;\frac{1}{2}\right)$

3. $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}21\\4{,}5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}28\\6\end{pmatrix}$, les points I, B et C sont alignés.

4. $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}20{,}25\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}27\\4\end{pmatrix}$, les points I, J et K sont alignés.

127 **1.** $M(2k-4;5k-2)$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2k-7\\5k-9\end{pmatrix}$

2. On choisit k pour que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires. On trouve $k=\frac{16}{7}$.

128 $B(x;y)$ et $C(x';y')$.

B appartient à la médiatrice de [AD] donc $-3x+4y=-5{,}5$.

C est le symétrique de B par rapport à $I\left(\frac{1}{2};-1)\right)$, centre de ABDC donc $x'=1-x$ et $y'=-2-y$

129 **1.** $D(1;4)$

2. $AH^2=9$, $HC^2=121$, $AC^2=130$

3. H, D et C sont alignés car ils ont la même ordonnée.

4. $\mathcal{A}=24$

À chacun son rythme

130

L'énoncé A reprend les 3 types de questions à savoir faire sur des questions fermées, l'énoncé B nécessite d'émettre une conjecture puis de la démontrer
l'énoncé C est une démonstration non guidée.

Énoncé A

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$

2. $J\left(-\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$ milieu de [AC] et [BD].

3. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-8\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Énoncé B

1. $I(-7\,;1)$
2. $EA^2=25$, $BE^2=25$ et $AB^2=50$
3. IEAD est un rectangle.

Énoncé C

1. $F(-8\,;-6)$
2. $\mathcal{A}_{CBDF}=37{,}5$
3. $\mathcal{A}_{BEAD}=37{,}5$ par symétrie de centre B.

Exercices de synthèse p. 168

131 Un quadrilatère particulier

1. a) $D(-4;-1)$ b) $O\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$
2. $AB^2=AD^2=13$ et $DB^2=26$

132 Quatre points alignés

1. $I(0;3)$ 2. $D(-9;-6)$
3. $E(9;12)$ 4. $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}18\\18\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IH}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$

133 Translation et symétrie

1. ABC est rectangle en A car $AB^2=32$, $AC^2=8$ et $BC^2=40$
2. $D(-7;5)$
3. $E(-5;-1)$
4. A est aussi le milieu de [BD] et donc ~~ABCD~~ remplacer par BCDE est un losange

134 Dans un carré

1. **Attention :** dans l'énoncé, il faut lire $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DA})$
2. Le repère est orthonormé.
3. $A(0\,;0)$, $B(1;0)$, $D(0;1)$
4. a) $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$

   b) $E\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$
5. $F(1;2)$
6. $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires donc les points A, E et F sont alignés.

135 Projeté orthogonal et aire

1. $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
2. ABD est rectangle en B car $AB^2=5$, $BD^2=20$ et $AD^2=25$
3. $(AB)\perp(BD)$ et $B\in(CD)$
4. $\mathcal{A}$=7,5
5. $BC=BA=\sqrt{5}$
6. ABC est isocèle en B.

136 Parallèles et perpendiculaires

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.
2. a) $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$.

   b) I est le milieu de [AB].
3. $AC=BC=\sqrt{50}$
4. (CI) est la médiane d'un triangle isocèle de sommet C donc c'est la hauteur.

137 Médiatrice

1. $AC^2=BC^2=26$ et $AB^2=52$
2. 45°
3. K(3 ; 2)
4. $KO=OC=\sqrt{13}$
5. Soit I milieu de [OC]. I est le milieu de [KF] donc $F(-2\,;-3)$.

138 Construction

2. b) $I(1;2)$

   c) $r=\frac{5}{2}$
3. a) $IA=\frac{5}{2}$

   b) FAN est rectangle en A.

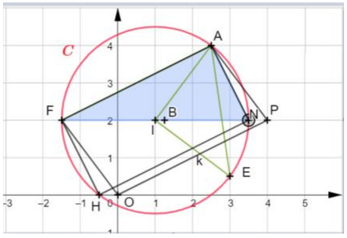
   c) $OI=\sqrt{5}$, O n'appartient pas au cercle C
4. a) $B\left(\frac{5}{4};2\right)$

   b) $P(4;2)$

   d) F, P et N ont la même ordonnée, ils sont alignés.
5. b) IA=IE donc E appartient au cercle C.

   c) $E(3;0{,}5)$ par lecture graphique
6. b) $H\left(-\frac{1}{2};0\right)$ donc H appartient à l'axe des abscisses.

c) FANH est un rectangle : I milieu de [FN] et [AH] et AH=FN



139 Quadrilatères

1. a) $S\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

c) $R\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$

d) PTMR est un parallélogramme.

2.a) $\overrightarrow{MT}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{UT}\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\ -\frac{5}{2}\end{pmatrix}$ sont colinéaires et ont un point commun dont les points U, M et T sont alignés.

b) PTMR est un parallélogramme dont (MT)//(PR). $U\in(MT)$ donc (UT)//(PR)

c) $\overrightarrow{TR}\begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{UP}\begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}$ sont égaux.

d) $TP=\sqrt{\frac{41}{2}}$ et $RU=\sqrt{\frac{41}{2}}$

e) TUPR est un rectangle.

3. a) $N(6;-1)$ **b)** $\overrightarrow{UP}\begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{UN}\begin{pmatrix}4\\ -4\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{MR}\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RN}\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ sont égaux et donc colinéaires et ont un point commun donc les points M, R et N sont alignés.

Donc N est un point des droites (UP) et (MR), c'est donc leur point d'intersection.

c) Le triangle MUN est rectangle en U

Exercices d'approfondissement

p. 169

140 Agrandissement et périmètre

1. $L\left(\frac{1}{2};\frac{13}{40}\right)$ $\quad Y\left(\frac{2+3\sqrt{5}}{6};\frac{1+2\sqrt{3}}{8}\right)$

$S\left(\frac{1+3\sqrt{5}}{6};\frac{4+5\sqrt{3}}{20}\right)$

2. $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}\frac{3\sqrt{5}-2}{3}\\ \frac{2\sqrt{3}-1}{4}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{LS}\begin{pmatrix}\frac{3\sqrt{5}-2}{6}\\ \frac{2\sqrt{3}-1}{8}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MO}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{3}{20}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SY}\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\ -\frac{3}{40}\end{pmatrix}$

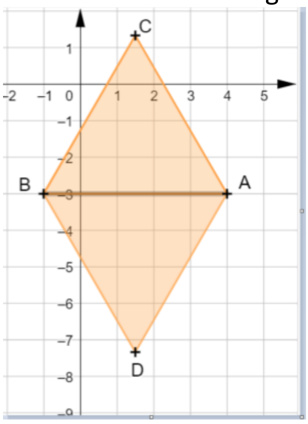
$\overrightarrow{MI}\begin{pmatrix}\frac{3\sqrt{5}-1}{2}\\ \frac{5\sqrt{3}-4}{10}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{LY}\begin{pmatrix}\frac{3\sqrt{5}-1}{6}\\ \frac{5\sqrt{3}-4}{20}\end{pmatrix}$

3. $p_{MOI}\approx 4{,}01$

4. $p_{LYS}\approx 2{,}05$

141 Nature d'un quadrilatère

1. et **2.** On obtient la figure suivante.



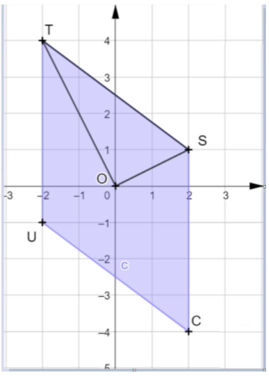
3. L'abscisse de C est $\frac{3}{2}$.

4. L'ordonnée de C est $\frac{4}{3}$.

6. ADBC est un losange. (C et D appartiennent à la médiatrice de [AB])

142 Coordonnées de points

1. et **2.** On obtient la figure suivante.



3. $T(-2;4)$

4. $U(-2;-1)$ et $C(2;-4)$

143 Distances

1. $AB=4\sqrt{5}$, $BC=3\sqrt{5}$ et $AC=5\sqrt{5}$

2. ABC est un triangle rectangle en B.

3. $\mathcal{A}=30$

4. $p=12\sqrt{5}\approx 26{,}8$

5. E est le milieu de [AC].

6. $E\left(1;\frac{5}{2}\right)$

7. $EA=EC=EB=\frac{5}{2}\sqrt{5}$

144 Repère et carré

2. Le repère est orthonormé.

3. $A(0;0)$ $B(1;0)$ $D(0;1)$

4. $I\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $V\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$

5. $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}-2}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DV}\begin{pmatrix}1+\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ sont colinéaires et ont un point commun donc les points D, I et V sont alignés.

145 Comparaison de deux méthodes de résolution

1. Les points semblent alignés

Partie A ▶ Sans coordonnées

2. $\overrightarrow{GA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

3. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AF}$ car F milieu de [DE] donc $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$ donc $k=\frac{2}{3}$.

4. $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires et ont un point commun donc les points A, G et F sont alignés.

Partie B ▶ Avec les coordonnées

5. $F\left(6,-\frac{11}{2}\right)$ et $G\left(\frac{16}{3};-\frac{13}{3}\right)$

6. $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\ -\frac{7}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}2\\ -\frac{7}{2}\end{pmatrix}$ sont colinéaires

7. Les points A, G et F sont alignés.

Partie C ▶ Comparaison

8. La partie B est calculatoire et peut se programmer. La partie A est davantage réfléchie.

146 Repère et parallélogramme

2. Les points semblent alignés.

3. $A(0;0)$

$B(1;0)$

$D(0;1)$

4. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

5. $C(1;1)$

6. $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $F\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$

7. $E(0;2)$

8. $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

147 Choisir un repère

2. Dans le repère $(A;\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB})$:

$O(-1;0)$, $G\left(0;\frac{3}{5}\right)$ et $J(4;3)$

$\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}5\\ 3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}1\\ \frac{3}{5}\end{pmatrix}$ sont colinéaires et ont un point commun donc les points O, J et G sont alignés.

148 Conjecture

ABCD est un losange.

Vers la 1re

149 Vers la spécialité Maths

1. $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{3}{5}$

Partie ▶ Méthode géométrique

2. a) $\overrightarrow{AR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BT} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

b)

$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

3.

$\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{9}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

4.

$\frac{5}{9}\overrightarrow{RT} = \frac{5}{9} \times \left(\frac{9}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\right)$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{RS}$

Partie B ▶ Méthode analytique

5. $A(0;0)$, $B(1;0)$ et $C(0;1)$

$S\left(0;\frac{1}{3}\right)$, $R\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

6. $T\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right)$

7. $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{4}{15}\end{pmatrix}$

8. $\overrightarrow{SR}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ .On a $\overrightarrow{SR} = -\frac{5}{4}\overrightarrow{ST}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{SR}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont colinéaires et ont un point commun. Les points S, R et T sont donc alignés.

150 Vers STI2D

1. $\vec{F_1}\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}$, $\vec{F_2}\begin{pmatrix}-1\\ -3\end{pmatrix}$ et $\vec{F_3}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$

2. $\vec{F_R}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

3. L'objet n'est pas en équilibre, il se déplace selon l'axe $\left(O\vec{i}\right)$ vers le haut. droite.

151 Vers STI2D

1. L'ordonnée de S est nulle comme l'ordonnée du vecteur résultante (le skieur reste sur la pente).

2. $\vec{R}\begin{pmatrix}0\\ \|\vec{R}\|\end{pmatrix}$ $\vec{T}\begin{pmatrix}\|\vec{T}\|\\ 0\end{pmatrix}$ $\vec{f}\begin{pmatrix}-\|\vec{f}\|\\ 0\end{pmatrix}$

3. M est le projeté orthogonal de G sur $\left(O,\vec{i}\right)$ et L est le projeté orthogonal de G sur $\left(O,\vec{j}\right)$.

On a $\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SL}$

On pose $P_x = -\left\|\overrightarrow{SM}\right\|$ et $P_y = -\left\|\overrightarrow{SL}\right\|$

D'où l'égalité demandée.

α

4. $MSG = \alpha$ (ce sont deux angles à côtés perpendiculaires)

5. $P_x = -\|P\| \times \sin(\alpha)$

$P_y = -\|P\| \times \cos(\alpha)$

6.

$\vec{F_R}\begin{pmatrix}\|\vec{T}\| - \|\vec{f}\| - \|P\| \times \sin(\alpha)\\ \|\vec{R}\| - \|P\| \times \cos(\alpha)\end{pmatrix}$

7. $\|\vec{T}\| > 80 \times 9{,}8 \times \sin(25)$

$\|\vec{T}\| > 331{,}3$

8. $\|\vec{T}\| > 100 + 80 \times 9{,}8 \times \cos(25)$

$\|\vec{T}\| > 433{,}3$

Préparer le contrôle

Je me teste p. 172

Objectif 1 Déterminer les coordonnées d'un vecteur

152 B **153** D **154** B

Objectif 2 Déterminer les coordonnées d'un point

155 B **156** C **157** D

Objectif 3 Déterminer la norme d'un vecteur

158 B **159** A **160** C

Objectif 4 Utiliser la colinéarité

161 C et D **162** C **163** B

Préparer le contrôle
Je m'entraîne p. 173

Objectif 1 Déterminer les coordonnées d'un vecteur

164 1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ 2. $\vec{u}$

165 $\vec{w}\begin{pmatrix}-31\\17\end{pmatrix}$ **166** $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

Objectif 2 Déterminer les coordonnées d'un point

167 $(1;1)$ **168** $D(5;-1)$

169 $Q(7;-7)$

Objectif 3 Déterminer la norme d'un vecteur

170 $\sqrt{113}$

171 1. $AB^2+AC^2=100$ et $BC^2=100$ donc le triangle ABC est rectangle en A.

2. $\mathcal{A}_{ABC}=\dfrac{AB\times AC}{2}=25$

172 1. $PI^2+PC^2=26{,}5$ et $IC^2=26{,}5$ donc le triangle PIC est rectangle en P.

2. $AP=AI=AC=\sqrt{6{,}625}$

173 1. $\overrightarrow{RI}\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RI}=\overrightarrow{HC}$. On a $RC=IH=\sqrt{90}$. RICH est un parallélogramme avec des avec des diagonales de même longueur : c'est donc un rectangle.

2. $\widehat{RIH}\approx 26{,}6°$

Objectif 4 Utiliser la colinéarité

174 1. Oui car $6\times(-3)-2\times 9=0$

2. Oui car $9\times 1-(-3)\times(-3)=0$

175 $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont colinéaires car $4\times 2-1\times 8=0$ donc (DE)//(GF)

$\overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{EF}$ ne sont pas colinéaires car $0\times(-5)-(-6)\times 4\neq 0$

DEFG est un trapèze.

176 $x = 1$ ou $x = 3$.

Travaux pratiques p. 174-175

1 Parallèles, alignés ?

• **Durée estimée :** 50 min

• **Objectif :** Écrire un programme qui à partir de 4 points étudie toutes les configurations possibles de ces quatre points utilisant le déterminant.

▶ **A. Fonction « déterminant »**

```
def determinant(X,Y,Z,T):
  det=X*T-Z*Y
  return det
```

▶ **B. Fonction « points alignés»**

1. La fonction a 6 paramètres, l'abscisse et l'ordonnée des 3 points.
2. La variable `aligne` est un booléen.
3.

```
def aligne(xA,yA,xB,yB,xC,yC):
 X=xB-xA
 Y=yB-yA
 Z=xC-xA
 T=yC-yA
 if determinant(X, Y, Z, T)==0 :
  aligne=True
 else:
   aligne=False
 return aligne
```

▶ C. Fonction « droites parallèles »

1. La fonction a 8 paramètres, l'abscisse et l'ordonnée des 4 points.

2. la variable parallèle est un booléen

3.

```
def parallele(xA,yA,xB,yB,xC,yC,xD,yD):
 if determinant(xB-xA, yB-yA, xD-xC, yD-yC)==0 :
  parallele=True
 else:
  parallele=False
 return parallele
```

▶ D. Un programme à partir de ces fonctions

1. Les données entrées par l'utilisateur :

• les coordonnées des points A, B et C ou A, B, C et D,

• ce qu'il faut tester : alignement ou parallélisme.

2.

```
C=int(input("tester alignement, taper 1; tester le parallélisme, taper 2"))
XA=float(input("Saisissez l'abscisse du point A."))
YA=float(input("Saisissez l'ordonnée du point A."))
XB=float(input("Saisissez l'abscisse du point B."))
YB=float(input("Saisissez l'ordonnée du point B."))
XC=float(input("Saisissez l'abscisse du point C."))
YC=float(input("Saisissez l'ordonnée du point C."))
if C==2 :
 XD=float(input("Saisissez l'abscisse du point D."))
 YD=float(input("Saisissez l'ordonnée du point D."))
if C==1 :
 if aligne(XA,YA,XB,YB,XC,YC):
  print("Les points sont alignés.")
 else :
  print("Les points ne sont pas alignés.")
if C==2:
 if parallele(XA,YA,XB,YB,XC,YC,XD,YD):
  print("Les droites sont parallèles")
 else :
  print("Les droites ne sont pas parallèles")
```

▶ E. Généralisation

Dans le cas de trois points, il y a un seul test de 3 points alignés en faisant appel à la fonction **`aligne`**

Dans le cas de quatre points :

L'alignement peut porter sur 3 points

(A, B, C) ; (A, B, D), (B, C, D) ; (C,D, A)

Les droites parallèles peuvent être :

(AB) et (CD) ; (AC) et (BD) ; (AD) et (BC)

Le programme doit donc tester toutes les possibilités.

2 Configuration géométrique

• **Durée estimée :** 50 minutes

• **Objectif :** Étudier une configuration géométrique en émettant une conjecture (partie A), en étudiant un cas particulier (partie B, géométrie repérée) puis en le démontrant dans le cas général (partie C, géométrie non repérée)

▶ A. Rechercher la position des points

4. Oui.

5. Il existe une infinité de solutions. On positionne le point E sur la demi-droite [AB) (sauf sur B) puis la position du point F est fixé.

▶ B. Dans un cas particulier

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.

2. a) A, B et E sont alignés donc $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel a tel que $\overrightarrow{BE}=a\overrightarrow{AB}$

b) **Attention,** il faut lire $|a|$ plutôt que a et $|b|$ plutôt que b et donc

$\left\|\overrightarrow{BE}\right\|=|a|\times\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{DF}\right\|=|b|\times\left\|\overrightarrow{AD}\right\|$

3. e) $ab=\frac{1}{4}$

À noter que la relation peut être compliquée à trouver. En fixant des valeurs de a en commençant par 1, elle devient évidente.

4. $E(2a+4;3a+1)$ et $F(5b+7;-2)$

5. $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix}-2a+\frac{5}{2}\\-3a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JF}\begin{pmatrix}-1+5b\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

6. $4ab=1$

▶ C. Dans le cas général

1. a) $A(0;0)$ $\quad B(0,1)$ $\quad D(1,0)$ $\quad C(1;1)$

b) $E(0;a+1)$ et $F(b+1;0)$

c) $\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JF}\begin{pmatrix}b\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{JF}$ sont colinéaires si et seulement si $ab=\frac{1}{4}$.

Chapitre 7 Droites du plan et systèmes d'équations

↪Manuel p.177-203

Commentaires pédagogiques

Ce chapitre est constitué de deux parties :
• **Équations de droites :** dans laquelle on va étudier les équations cartésiennes à partir des vecteurs mais également les équations réduites à partir du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine. Il s'agit d'être capable de lire graphiquement mais également de déterminer par le calcul une équation cartésienne ou une équation réduite de droite.
• **Résolution de système d'équations à deux inconnues :** dans laquelle en s'appuyant sur l'étude des intersections de droites et donc la détermination par le calcul les coordonnées des points d'intersection éventuels, on introduit différentes méthodes de résolution d'un système de deux équations à deux inconnues. La résolution de système peut aussi se présenter de manière indépendante si on le souhaite.
Les capacités mises en jeu dans ce chapitre sont :
• Faire des calculs avec des coordonnées.
• Identifier les paramètres d'une équation de droite.
• Résoudre des équations.
• Modéliser des problèmes de géométrie.

Corrigés des activités et des exercices

Pour prendre un bon départ p. 177

1 Coordonnées de vecteurs

1. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

2. Les vecteurs sont égaux donc ADBC est un parallélogramme.

3. Son centre est le milieu de [AB] soit $(3;-2)$

2 Colinéarité et alignement

1. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{BC}$ donc les points A, B et C sont alignés.

2 Colinéarité et parallélisme

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

2. $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$ donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

4 Intersections

1. On a les points : (0;2) pour l'intersections de (AB) avec l'axe des ordonnées et (4;0) pour l'intersection de (AB) avec l'axe des abscisses.

2. Par exemple : $(-2;-1)$, (0;0) et (4;2).

3. Le point d'intersection est : (2;1)

5 Droites particulières

1. Elle est horizontale.

2. Elle est verticale.

6 Relation algébrique

Le tableau donne :

x	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{4}$	$-\frac{3}{4}$	4
y	7	2	$\frac{13}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{2}$	-3

Activités

p. 46-47

1 Droite et vecteur

• **Durée estimée :** 15 min
• **Objectif** : découvrir la notion de vecteur directeur

2. Pour k = 0.
3. Pour k = 1.
4. Pour k = 0,5.
5. a) Sur le segment [AB.]
b) Sur la demi-droite d'origine B et ne passant pas par A.
c) sur la demi-droite d'origine A et ne passant pas par B.
6. a) Sur la droite (BC).
b) Le point A pour $h = 2$, le point B pour $h = 0$ et le point C pour $h = 1$
c) Origine est B et le vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$

2 Découvrir l'équation réduite d'une droite

• **Durée estimée :** 10 min
• **Objectif :** découvrir les rôles de m et de p

4. a) C'est le point de coordonnées (0;*p*)
b) Elles sont parallèles
5. a) Plus *m* est grand plus la droite est verticale et plus *m* est proche de 0 plus elle est horizontale.
b) Si *m*>0 alors la droite monte et si *m*<0 alors la droite descend.

3 Résoudre un système d'équations à deux inconnues par substitution

• **Durée estimée :** 15 min
• **Objectif :** découvrir la notion de système et une méthode résolution

1. $5x+y=11{,}5$
2. $2x+3y=12{,}4$
3. $y=-5x+11{,}5$

$2x+3(-5x+11{,}5)=12{,}4$

4. et **5.** $-13x=-22{,}1$ donc $x=1{,}7$
6. $y=-5\times1{,}7+11{,}5=3$
7. Une empanada végétarienne coûte 1,70 euros et une empanada au boeuf coûte 3 euros.

4 Résoudre un système d'équations à deux inconnues par combinaison

• **Durée estimée :** 15 min
• **Objectif :** découvrir une autre méthode de résolution

1. a) On voit que la lecture est compliquée. Le point d'intersection semble avoir comme coordonnées approximatives (0,6; 1,2).
2. On obtient le système suivant.

$$\begin{cases}5x-6y+4=0\\-6x+9y-7=0\end{cases}$$

3. On obtient le nouveau système suivant.

$$\begin{cases}30x-36y+24=0\\-30x+45y-35=0\end{cases}$$

4. $9y-11=0$ et $y=\dfrac{11}{9}$
5. On multiplie la ligne 1 par 3 et la ligne 2 par 2 ce qui donne le système suivant.

$$\begin{cases}15x-18y+12=0\\-12x+18y-14=0\end{cases}$$

6. Par addition : $3x-2=0$ donc le point d'intersection est $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{11}{9}\right)$.

Exercices résolus

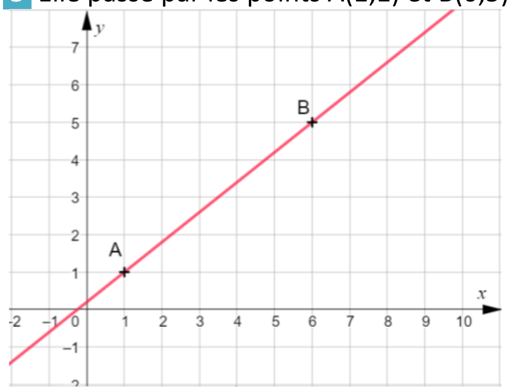
À vous de jouer

p. 181

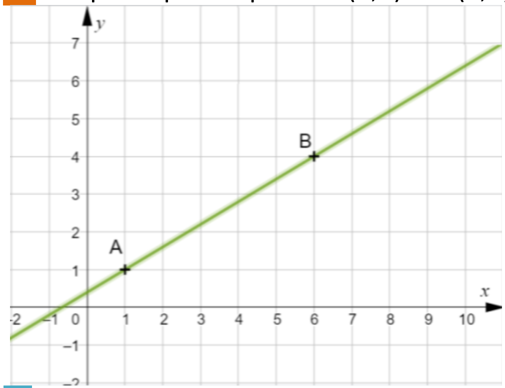
1 $2x+3y+1=0$

2 $y=1$

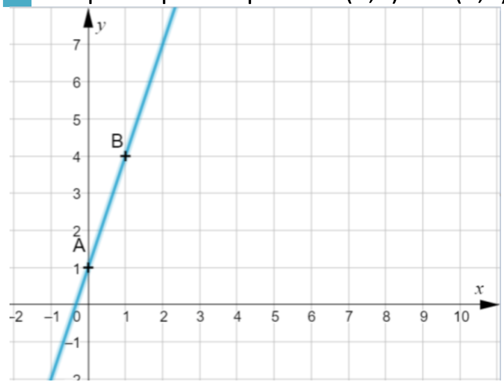
3 Elle passe par les points A(1;1) et B(6;5).



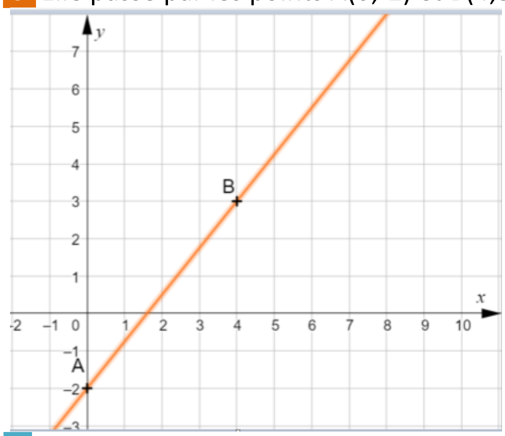
4 Elle passe par les points A(1;1) et B(6;4).



5 Elle passe par les points A(0;1) et B(1;4)



6 Elle passe par les points A(0;-2) et B(4;3)



7 $y=-\frac{1}{4}x+2$

8 Pour d_1 : $x=-2$

Pour d_2 : $y=\frac{2}{3}x-1$

9 **1.** On calcule le coefficient directeur $m=\frac{4}{3}$

et elle passe par A donc $y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$.

2. $y=\frac{5}{2}x+2$.

10 **1.** On calcule le coefficient directeur

$m=\frac{1}{4}$ et elle passe par B donc $y=\frac{1}{4}x-\frac{19}{4}$

2. $x=2$

11 Les coefficients *a*, *b*, *a'* et *b'* sont proportionnels mais pas *c* et *c'* donc les droites sont parallèles mais pas confondues.

12 La première droite a pour équation réduite $y=-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}$ donc elle n'a pas le même coefficient directeur que l'autre droite, elles sont donc sécantes.

13 La solution est $\left(\frac{19}{11};-\frac{12}{11}\right)$

14 La solution est $\left(\frac{9}{11};\frac{5}{11}\right)$

15 La solution est $\left(-\frac{11}{14};-\frac{5}{7}\right)$

16 La solution est $\left(\frac{2}{27};\frac{5}{18}\right)$

Exercices résolution de problèmes

p. 188

17 **Résolution par substitution**

Soit x le prix d'un café et y celui d'un croissant. La solution **d)** est aberrante car on ne peut pas avoir des solutions négatives.

Le système est : $\begin{cases} x+3y=7{,}5 \\ 3x+4y=12{,}5 \end{cases}$

En remplaçant on constate que seule la solution **b)** fonctionne. Donc le café coûte 1,5 euros et le croissant 2 euros.

18 **Résolution par lecture graphique**

Le signe de m est négatif donc les solutions plausibles sont **c**) et **d)**.Or *p* = 2 donc la solution est la **c)**

19 **Intersection de droites**

L'abscisse du point d'intersection est positive donc on peut éliminer les solutions **a)** et **c)**. De même, on voit que l'ordonnée du point n'est pas égale à 1 donc on enlève la solution **b)**. Donc la réponse est la **d)** et le point d'intersection est (10 ; 3).

Exercices automatismes p. 189

Rituel 1

20 $\frac{13}{12}$

21 $\frac{9}{8}$

22 $\mathcal{V}=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\times 6^2\times 10=120\pi\ \text{cm}^3$

23 $\mathcal{A}=2\pi rh=2\pi\times 5\times 12=120\pi\ \text{cm}^2$

Rituel 2

24 $\mathcal{S}=\left\{\frac{2}{5}\right\}$

25 $\mathcal{S}=\{1\}$

26 A(1 ; 2) et B(3 ; –1).

27 C(–3 ; –2) et D(–2 ; 3).

Rituel 3

28 $500\times 160=80\,000$ donc oui le résultat paraît cohérent.

29 $6\,000\times 0{,}5\times 10^4=3\times 10^7$

30 $\mathcal{A}=4\pi R^2=4\pi\times 7^2=196\pi$

31 A(–3 ; 3) et B(–2 ; –1).

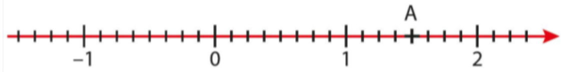
32 C(2 ; 1) et D(1 ; –2).

Rituel 4

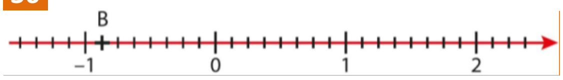
33 $\frac{3}{2}$

34 $20+12=A+2$ donc A = 30 arêtes.

35



36



Exercices d'entraînement p. 56-61

Je consolide mes acquis

37 **Lecture graphique**

1. $h(-2)=-1$, $h(0)=3$ et $h(1)=5$

2. L'antécédent de 3 est 0, celui de 1 est –1 et celui de 5 est 1.

38 **Images**

a) $f(-3)=-16$ **b)** $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$

c) $f\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{19}{4}$ **d)** $f(2)=9$

39 **Antécédents**

a) L'antécédent de 2 est $\frac{3}{4}$.

b) L'antécédent de -4 est $\frac{9}{4}$.

c) L'antécédent de $\frac{1}{2}$ est $\frac{9}{8}$.

d) L'antécédent de $-\frac{5}{3}$ est $\frac{5}{3}$.

40 **Équations**

a) $\mathcal{S}=\{-2\}$ **b)** $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

c) $\mathcal{S}=\{1\}$ **d)** $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{44}\right\}$

41 **Coordonnées**

A(2;1), B(1;–1), C(–3;–2), D(–1;2) et E(1;–3)

Questions de cours

42 **1.** Une droite admet une seule équation réduite.

2. Une droite admet plusieurs équations cartésiennes.

43 *m* est le coefficient directeur et *p* l'ordonnée à l'origine.

44 On compte les déplacements horizontaux et verticaux.

45 On cherche si deux vecteurs directeurs sont colinéaires.

46 Soit par substitution, soit par combinaison.

Équation cartésienne

47 **1.** $-3-3+7=1\neq 0$ donc $C\notin d$

2. $\frac{5}{3}-3y+7=0$ donc $y_D=\frac{26}{9}$

3. $x+\frac{9}{2}+7=0$ donc $x_E=-\frac{23}{2}$

4. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

48 Intersection avec l'axe des ordonnées :

$0-6y+3=0$ d'où le point $\left(0;\frac{1}{2}\right)$

Intersection avec l'axe des abscisses:

$2x-0+3=0$ donne le point $\left(-\frac{3}{2};0\right)$

49 **1.** $-10-6-3=-16\neq 0$ donc $E\notin d$

2. $-5x-2-3=0$ donc $x_F=-1$

3. $-5+2y-3=0$ donc $y_G=4$

4. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

50 **1.** $3x-0-2=0$ donc $x=\frac{2}{3}$. Le point d'intersection avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3};0\right)$.

2. $0-5y-2=0$ donc $y=-\frac{2}{5}$ Le point d'intersection avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $\left(0;-\frac{2}{5}\right)$.

Détermination d'une équation cartésienne de droite

51 $x+3y-5=0$

52 $2x+y=0$

53 $x=-2$

54 $y=-3$

55 Pour d_1 : le point (0;2), le vecteur $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et l'équation $3x-2y+4=0$

Pour d_2 : le point (2;1), le vecteur $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ et l'équation $2x-5y+1=0$

Pour d_3 : le point (1;-1), le vecteur $\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ et l'équation $5x+3y-2=0$

56 $4x+3y-5=0$

57 **a)** (CD) : $7x+3y-15=0$

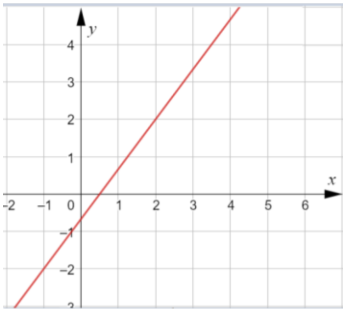
b) (SV) : $-6x+2y-6=0$

58 $x+y-2=0$

59 Ce programme calcule les coordonnées d'un vecteur directeur, puis la valeur de *c* en fonction des points A et B.

Représentation graphique d'une droite donnée par une équation cartésienne

60 Elle passe par les points de coordonnées $(-1;-2)$ et $(2;2)$

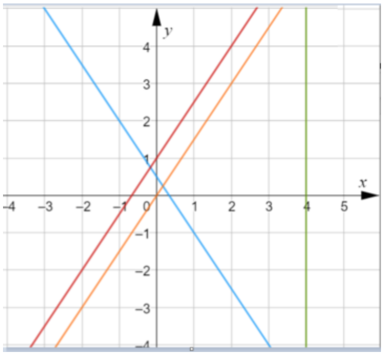


61 **a)** En bleu : elle passe par les points de coordonnées $(-1;2)$ et $(3;-4)$.

b) En rouge : elle passe par les points de coordonnées $(-2;-2)$ et $(0;1)$.

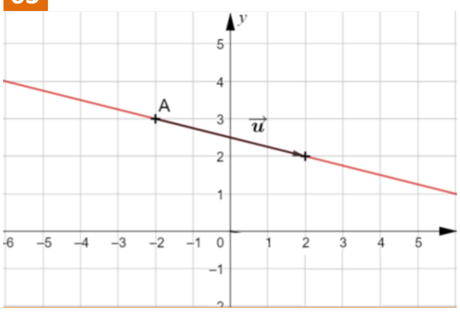
c) En vert : elle passe par les points de coordonnées $(4;0)$ et $(4;1)$.

d) En orange: elle passe par les points de coordonnées $(0;0)$ et $(2;3)$.

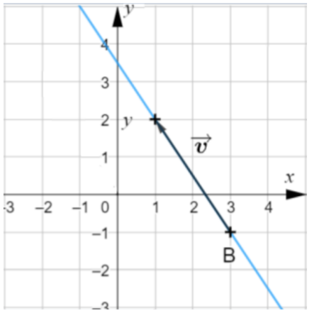


62 **a)** En violet: elle passe par les points de coordonnées $(0;-3)$ et $(2;5)$.
b) En marron : elle passe par les points de coordonnées $(-4;-1)$ et $(2;1)$.
c) En bleu : elle passe par les points de coordonnées $(-4;-1)$ et $(2;3)$.
d) En rose: elle passe par les points de coordonnées $(-3;-1)$ et $(3;0)$.

63



64



Équation réduite

65 **1.** $2 \neq -2+1$ donc $A \notin d$
2. $x=1$
3. $y=7$

66 **1.** $-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=-2$ donc $B \in d$
2. $x=-\frac{6}{5}$
3. $y=3$

67 **1.** $m=-3$
2. $p=5$

68 **1.** $m=\frac{5}{4}$
2. $p=-\frac{2}{3}$

69 $y=2x+\frac{5}{3}$

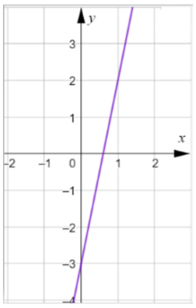
70 **1.** $y=-\frac{2}{7}x+\frac{1}{7}$
2. $m=-\frac{2}{7}$
3. $p=\frac{1}{7}$

71 $h=\frac{\mathcal{A}}{2\pi r}$

72 $t=\frac{d}{v}$

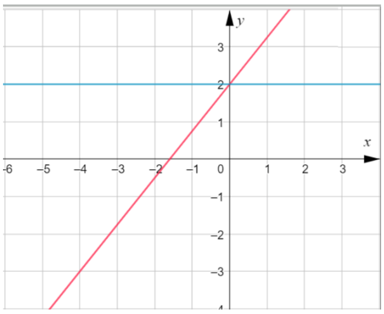
Représentation graphique d'une droite donnée par une équation réduite

73 Elle passe par les points de coordonnées $(0;-3)$ et $(1;2)$.



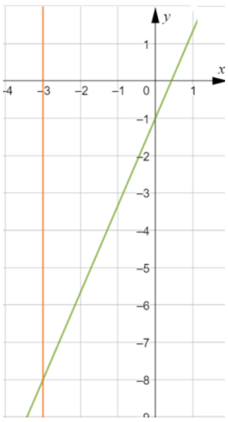
74 **a)** En rouge : elle passe par les points de coordonnées $(-4;-3)$ et $(0;2)$.

b) En rouge : elle passe par les points de coordonnées $(-2;2)$ et $(0;2)$.



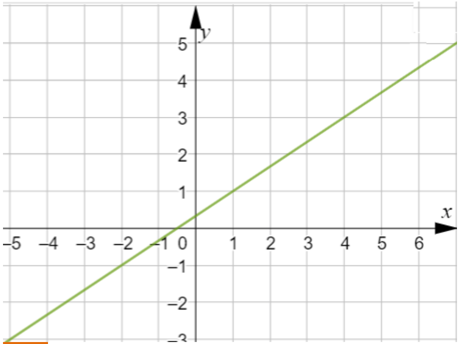
75 **a)** En vert : elle passe par les points de coordonnées $(-3;-8)$ et $(0;-1)$.

b) En orange : elle passe par les points de coordonnées $(-3;-8)$ et $(-3;0)$.



76 **1.** $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

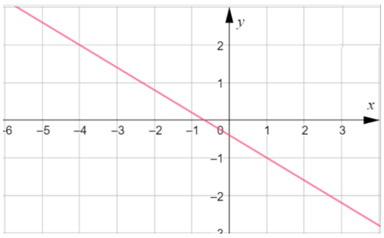
2.



77

1. $y=-\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}$

2. Elle passe par les points de coordonnées $(-4;2)$ et $(1;-1)$



Détermination graphique de l'équation réduite d'une droite

78 $d_1 : y=x-2$

$d_2 : y=2$

$d_3 : y=-2x+4$

$d_4 : x=-1$

79 $d_1 : y=-\frac{1}{3}x+1$

$d_2 : y=\frac{3}{2}x-2$

$d_3 : y=-2x+3$

80 $d_1 : y=\frac{1}{3}x+3$

$d_2 : x=1$

$d_3 : y=\frac{4}{3}x-2$

$d_4 : y=-\frac{3}{4}x+1$

81 $d_1 : y=\frac{5}{3}x-2$ $\quad$ $d_2 : y=\frac{2}{3}x+2$

$d_3 : y=-\frac{1}{4}x+3$ $\quad$ $d_4 : y=-1$

82 **1.** $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

2. $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\ -\frac{4}{3}\end{pmatrix}$

3. $p=-\frac{4}{3}$

4. $y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$

83.

Pour d_1 : $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ donc

$p=\frac{2}{3}$ et $y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$

Pour d_2 : $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{6}\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ donc

$p=\frac{1}{3}$ et $y=\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}$

Détermination de l'équation réduite d'une droite par le calcul

84 $m=\frac{3}{5}$

85 $m=-5$

86 $y=-x+3$

87 **a)** $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$
b) $y=1$

88 **a)** $y=-1$
b) $y=\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}$

89 **a)** $x=-3$
b) $y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$

90 $x=1$

91 $y=-2x+6$

92 **a)** $y=-\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}$
b) $y=\frac{3}{4}x-\frac{9}{2}$

93 $y=3x+7$

94 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$

95 $y=-2x+6$

96 Cet algorithme calcule le coefficient directeur d'une droite.

Position relative de droites

97 **a)** $\vec{u_1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{u_2}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc les droites d_1 et d_2 sont sécantes.

b) $\vec{u_3}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u_4}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les droites d_3 et d_4 sont parallèles

98 **a)** $\vec{u_1}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{u_2}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les droites d_1 et d_2 sont parallèles

b) $\vec{u_3}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{u_4}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc les droites d_3 et d_4 sont sécantes

99 **a)** $m\neq m'$ donc d et d' sont sécantes.
b) d' est une droite verticale et d *est* une droite oblique donc d et d' sont sécantes.
c) d' une droite verticale et d est une droite oblique donc d et d' sont sécantes.
d) d et d' sont deux droites verticales donc d et d' sont parallèles.

100 **a)** $\frac{2}{3}\neq-\frac{3}{2}$ donc les droites sont sécantes.

b) $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{u_2}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc les droites sont sécantes

Résolution d'un système par substitution

101 $x=-\frac{2}{5}$ et $y=\frac{1}{5}$.

102 Vérifier un résultat

a) $x=17$ et $y=7$.

b) $x=-\frac{5}{13}$ et $y=-\frac{1}{13}$

103 **a)** Pas de solution.

b) $x=\frac{10}{13}$ et $y=\frac{4}{13}$.

104 **a)** $x=1$ et $y=2$.

b) $x=-1$ et $y=1$.

105. **a)** $x=\frac{36}{17}$ et $y=\frac{7}{17}$

b) $x=\frac{5}{6}$ et $y=-\frac{1}{2}$

Résolution d'un système par combinaison

106 $x=-2$ et $y=-1$

107 **a)** $x=-\frac{6}{7}$ et $y=-\frac{1}{7}$

b) $x=-2$ et $y=-1$

108 **a)** Une infinité de solutions.

b) $x=-\frac{3}{8}$ et $y=-\frac{1}{16}$

109 **a)** $x=-\frac{1}{2}$ et $y=0$

b) $x=-\frac{19}{16}$ et $y=\frac{5}{16}$

c) $x=-\frac{7}{3}$ et $y=-\frac{13}{3}$

d) Pas de solution.

Résolution d'un système

110 **a)** $x=\frac{3}{7}$ et $y=\frac{4}{7}$

b) $x=-\frac{19}{14}$ et $y=-\frac{8}{7}$

c) $x=\frac{8}{7}$ et $y=\frac{5}{7}$

d) Pas de solution.

111 **a)** $x=-\frac{3}{13}$ et $y=-\frac{7}{13}$

b) $x=-\frac{11}{19}$ et $y=\frac{5}{19}$

c) Une infinité de solutions.

d) $x = 0$ et $y = 1$.

112 **a)** $x=\frac{1}{2}$ et $y=0$.

Donc le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2};0\right)$.

b) $x=\frac{9}{11}$ et $y=\frac{8}{11}$

Donc le point de coordonnées $\left(\frac{9}{11};\frac{8}{11}\right)$

c) Pas de solution : les droites sont strictement parallèles.

d) Une infinité de solutions : les droites sont confondues.

113 d_1 a comme équation $y=2x+4$,

d_2 a comme équation $y=-x-2$,

d_3 a comme équation $y=-x+1$.

a) $x=-1$ et $y=2$. Donc d_1 et d_3 ont comme point d'intersection le point de coordonnées $(-1;2)$.

b) Pas de solution. Donc d_1 et d_3 n'ont aucun point d'intersection : elles sont parallèles.

c) $x=-2$ et $y=0$. Donc d_1 et d_2 ont comme point d'intersection le point de coordonnées $(2;0)$.

114 d_1 a comme équation $y=-2x+3$,

d_2 a comme équation $y=3x-2$,

d_3 a comme équation $x=3$.

a) $x=1$ et $y=1$. Donc d_1 et d_2 ont comme point d'intersection le point de coordonnées $(1;1)$.

b) $x=3$ et $y=7$.

Donc d_2 et d_3 ont comme point d'intersection le point de coordonnées $(3;7)$.

c) $x=3$ et $y=-3$. Donc d_1 et d_3 ont comme point d'intersection le point de coordonnées $(3;-3)$.

115 **a)** $d_1 : y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$ et $d_2 : y = \frac{1}{4}x + 3$

b) $x = \frac{64}{5}$ et $y = \frac{31}{5}$

Donc le point de coordonnées $\left(\frac{64}{5}; \frac{31}{5}\right)$.

116 **a)** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\12\end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-10\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}60\\60\end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles

c) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-285\\84\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-90\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et (CD) sont sécantes et leur intersection est solution du système :

$\begin{cases}28x + 95y - 6\,286 = 0\\ -90x + 2y + 7\,296 = 0\end{cases}$ soit le point de coordonnées $(82;42)$

117 Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de *d*.

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les droites (AB) et *d* sont parallèles.

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}186\\1110\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et *d* sont sécantes.

c) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et *d* sont sécantes.

118 On a le système suivant.

$\begin{cases}x + y = 20\\ 2x + y = 36\end{cases}$

donc 16 pièces de 2 € et 4 pièces de 1 €.

119 **Esprit critique**

1. Soit x le prix du kWh en heures creuses et y le prix du kWh en heures pleines.

On a le système suivant.

$\begin{cases}2\,166x + 4\,691y = 1\,206{,}54\\ 2\,484x + 1\,629y = 689{,}57\end{cases}$

qui donne les prix environ de $x = 0{,}1562$ et $y = 0{,}1851$

2. Il faut ajouter la TVA.

120 **Choisir le bon schéma**

1. L'aire vaut $L \times \ell$

2. On a : $(L+9)(\ell-3) = L\ell$ (1)

3. On a : $(L-7)(\ell+4) = L\ell$ (2)

4. a) On a le système suivant.

$\begin{cases}9\ell - 3L = 27\\ -7\ell + 4L = 28\end{cases}$

qui donne $L = 29{,}4$ m et $\ell = 12{,}8$ m

b) Donc l'aire du rectangle vaut : 376,32 m².

121 On a d'après le théorème de Thalès :

$\frac{x}{x+2} = \frac{x}{y} = \frac{3}{7}$ ce qui donne le système :

$\begin{cases}7x = 3y\\ 7x = 3(x+2)\end{cases}$ d'où $x = \frac{3}{2}$ et $y = \frac{7}{2}$

123 **Modéliser une situation**

Soit x le volume d'or et y le volume d'or blanc.

On a le système :

$\begin{cases}19{,}5x + 19{,}3y = 2{,}868\\ x + y = 0{,}148\end{cases}$

qui donne un volume de 0,058 cm³ d'or et 0,09 cm³ d'or blanc.

124 Soit t l'âge de Thomas et m l'âge de Maxence.

On a le système suivant.

$\begin{cases}m = 2t\\ m + 12 + t + 12 = 2(m+t)\end{cases}$

soit $\begin{cases}m = 2t\\ m + t = 24\end{cases}$

et donc Thomas a 8 ans et Maxence 16 ans.

125 Soit x le premier nombre et y le deuxième nombre.

On a le système suivant.

$\begin{cases}3x - 2y = 50\\ 2x + 7y = 125\end{cases}$

qui donne $x = 24$ et $y = 11$.

À chacun son rythme

126

Énoncé A

1. (AE) : $y=-3x-8$ et (BD) : $y=-\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}$

2. On a : $M\left(-5;7\right)$

Énoncé B

1. (DE) : $-x+2y-12=0$ et
(CF) : $x-y-6=0$

2. On a : N(24;18)

Énoncé C

(AD) : $y=4x+13$, (BC) : $y=-3x+6$ et
(EF) : $y=-\frac{3}{11}x+\frac{32}{11}$

L'intersection des droites (AD) et (BC) est le point $\left(-1;9\right)$ mais ce point n'appartient pas à la droite (EF) donc les droites ne sont pas concourantes.

Exercices de synthèse

p. 196

127. Équations cartésiennes

1. (AB) : $x+4y-17=0$

2. $2+0-17=-15\neq 0$

3. $d : 7x-2y-14=0$

4. $M\left(3;\frac{7}{2}\right)$

5. L'abscisse de P est 17.

128. Équations réduites

1. (AB) : $y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{2}$

2. $\frac{1}{4}+\frac{7}{2}=\frac{15}{4}\neq 2$

3. $d : y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$

4. M(2;3)

5. **Attention**, dans l'énoncé il faut lire
Déterminer l'ordonnée du point d'intersection
P de la droite *d* avec l'axe des ordonnées.

L'ordonnée de P est $\frac{7}{3}$

129 Point de concours

1. (AG) : $y=2x$ et (CE) : $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

2. $K\left(\frac{3}{5};\frac{6}{5}\right)$

3. (DF) : $y=\frac{1}{3}x+1$

4. $\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+1=\frac{6}{5}$

5. Le point $\left(-3;0\right)$

130 Ou est le point ?

1. d_1 passe par les points de coordonnées $\left(2;2\right)$ et $\left(5;1\right)$ et a pour équation
$x+3y-8=0$

d_2 a comme coefficient directeur $\frac{1}{5}$ et pour ordonnée à l'origine -3. Elle a donc pour équation $y=\frac{1}{5}x-3$

2. Le système est le suivant :

$$\begin{cases} x+3y-8=0 \\ x-5y-3=0 \end{cases}$$

Il a pour solution $x=\frac{49}{8}$ et $y=\frac{5}{8}$

131 Ciné film

On a le système suivant.

$$\begin{cases} x+y=35 \\ 7x+11y=305 \end{cases}$$

d'où 20 élèves utilisent leur réduction et 15 ne l'utilisent pas.

132 Critère de choix

1. $16x+12y=400$

2. Non.

3. Si $x=y$ alors 28 x=400 et x donc n'est pas entier.

4. Si $y=2x$ alors
$16x+12y=16x+24x=40x=400$ donc $x=10$ et $y=20$.

133 On a le système suivant.

$$\begin{cases} a-b=8 \\ a+b=36 \end{cases}$$

qui donne $a=22$ et $b=14$

134 On a le système suivant .

$$\begin{cases} a-b=7 \\ a^2-b^2=21=7(a+b) \end{cases}$$

soit $\begin{cases} a-b=7 \\ a+b=3 \end{cases}$

qui donne $a=5$ et $b=-2$

Exercices d'approfondissement

p. 197

135 Point fixe

2. $D(-6a;-6b)$ et $K\left(\frac{1}{2}-3a;-3b\right)$

3. (CK) : $-4bx+\left(4a-\frac{1}{2}\right)y+\frac{1}{2}b=0$

4. On obtient : $M\left(\frac{1}{8};0\right)$

5. Ce point est fixe car indépendant de a et de b.

136 Position

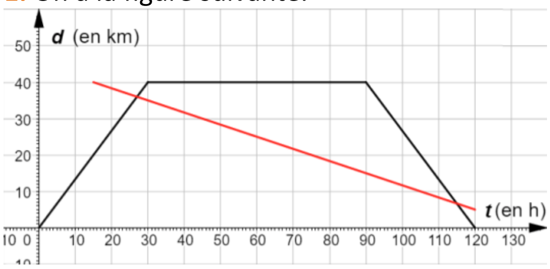
1. H(x; 0) et K(1; y) dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$

2. L'aire de AMB vaut : $\frac{AB\times MH}{2}$ et l'aire de BMC vaut : $\frac{BC\times MK}{2}$ qui sont égales quand MH = MK c'est à dire $(x-1)^2=y^2$

3. On en déduit que $y=-x+1$ ou $y=x-1$., la première est la droite (BD) et la deuxième est la droite parallèle à (AC) passant par B

137 Croisements

1. On a la figure suivante.



2. Dans l'ordre on a : $y=\frac{4}{3}x$., $y=40$ et $y=-\frac{4}{3}x+160$

3. On a : $y=-\frac{1}{3}x+45$

4. Deux fois.

5. Le premier croisement est solution du système :

$$\begin{cases} y=\frac{4}{3}x \\ y=-\frac{1}{3}x+45 \end{cases}$$

qui donne 27 min et 36 km.

Le deuxième est solution du système :

$$\begin{cases} y=-\frac{4}{3}x+160 \\ y=-\frac{1}{3}x+45 \end{cases}$$

qui donne 115 min et $\frac{20}{3}$ km.

138 Intersection inaccessible

On trace les droites symétriques de d et d' par rapport au point M, elles se coupent en un point A et ensuite on trace la droite (AM)

139 Théorème de Pappus- Histoire des sciences

1. (BF) : $2x+3y-5=0$ et (CE) : $x=4$

2. $M(4;-1)$

3. (AF) : $3x+7y=0$ et (CD) : $-7x+3y+16=0$.

4. $N\left(\frac{56}{29};-\frac{24}{29}\right)$

5. (AE) : $3x+4y=0$ et (BD) : $x=1$

6. $P\left(1;-\frac{3}{4}\right)$

7. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -\frac{60}{29} \\ \frac{5}{29} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les points M, N et P sont alignés.

140 Côtés d'un triangle

1. $ab=2\times 8{,}64=17{,}28$

2. D'après le théorème de Pythagore : $a^2+b^2=36$

3. $(a+b)^2=36+2\times 17{,}28=70{,}56$

Et $(a-b)^2=36-2\times 17{,}28=1{,}44$

4. D'où : $a+b=8{,}4$ et $a-b=1{,}2$

5. On obtient : $a=BC=4{,}8$ et $b=AC=3{,}6$

141 **Vente privée ou soldes**

1. $2x+y=120$

2. $3x+1{,}4y=174$

3. Un pantalon coûte 30 euros et une veste 60 euros.

4. Ils auraient dû payer 300 euros donc ils ont fait une économie de 126 euros

142 **Famille de droites**

1. a) On obtient : $y=x$

b) On obtient : $y=1$

c) On obtient : $y=-1$

2. a) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

3. On peut avoir des droites horizontales mais pas de droites verticales

4. On a : $\begin{cases}(m^2-1)x-y+m=0\\(n^2-1)x-y+n=0\end{cases}$

qui donne le point de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{m+n};\dfrac{mn+1}{m+n}\right)$

143 **Au concert**

1. La recette est $n\times p$

2. $\begin{cases}(n+400)(p-10)=np-8\,000\\(n-200)(p+10)=np+6\,000\end{cases}$

3. Cela revient au système suivant.

$\begin{cases}-10n+400p=-4000\\10n-200p=8\,000\end{cases}$

et on en déduit qu'il y a 1200 places à 20 euros.

144 **Hyperbole et fractions**

1. A$\left(a;\dfrac{1}{a}\right)$ et B$\left(b;\dfrac{1}{b}\right)b$

2. (AB) : $y=-\dfrac{1}{ab}x+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

3. On obtient $\left(0;\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ et $(a+b;0)$

4. La seule solution est $a=b=2$

Vers la 1re

145 **Vers la Spécialité Maths**

1. Cela vient de la hauteur d'un triangle équilatéral qui vaut $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. a) $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\\-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$ qui sont colinéaires.

b) (DE) : $\left(2-\sqrt{3}\right)x+y-1=0$ qui est vérifiée parles coordonnées de F.

c) Les angles de ADE sont 30°, 75° et 75°

Les angles de BEF sont 90°, 45° et 45°

D'où DEF est un angle plat.

146 **Vers la Spécialité Maths**

1. (OM) : $y=\dfrac{b}{a}x$

2. La tangente : $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{a^2+b^2}{b}$

3. D'où les points : $\left(0;\dfrac{a^2+b^2}{b}\right)$ et $\left(\dfrac{a^2+b^2}{a};0\right)$

147 **Vers la STI**

1. $M(5+t;4+2t)$ et $N(-1+3t;7+t)$

2. Il faut résoudre :

$\begin{cases}5+t=-1+3t\\4+2t=7+t\end{cases}$

qui donne t = 3.

Donc la collision a lieu au point de coordonnées (8;10).

Préparer le contrôle
Je me teste p. 200

Objectif 1 Utiliser une équation de droite

148 C

149 B

150 D

151 D

Objectif 2 Déterminer graphiquement une équation de droite

152 A

153 C

154 D

Objectif 3 Déterminer une équation de droite par le calcul

155 A

156 C

157 B

Objectif 4 Résoudre un système linéaire

158 D

159 B

160 A

Préparer le contrôle

Je m'entraîne

p. 201

Objectif 1 Utiliser une équation de droite

161 $y=\frac{7}{2}$

162 $m=\frac{5}{3}$

163 $(0;-2)$ et $\left(\frac{8}{3};0\right)$

Objectif 2 Déterminer graphiquement une équation de droite

164 $d_1 : y=-\frac{1}{4}x+3$

165 **1.** $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et (1 ;0)

2. $d_2 : -x+3y+1=0$

166 $d_3 : y=\frac{2}{5}x+2$

Objectif 3 Déterminer une équation de droite par le calcul

167 $y=\frac{1}{2}x+3$

168 $x=4$

169 **a)** (AB) : $2x-y+11=0$

b) (CD) : $5x+4y+7=0$

170 **a)** (EF) : $\frac{4}{3}x-\frac{7}{4}y+\frac{47}{12}=0$

b) (HK) : $x+\frac{11}{6}y+\frac{23}{30}=0$

Objectif 4 Résoudre un système linéaire

171 **1.** $m=-5$ et $m'=\frac{1}{2}$ sont distincts donc les droites se coupent.

2. $\left(\frac{7}{22};-\frac{13}{22}\right)$

3. Ce sont les coordonnées du point d'intersection.

172 $\left(-\frac{17}{46};-\frac{1}{46}\right)$

173 $\left(-\frac{21}{13};-\frac{32}{13}\right)$

174 On a le système : $\begin{cases}5x+3y=10{,}3\\3x+4y=10{,}8\end{cases}$ qui donne le prix d'un stylo 0,8 euro et d'un cahier 2,10 euros

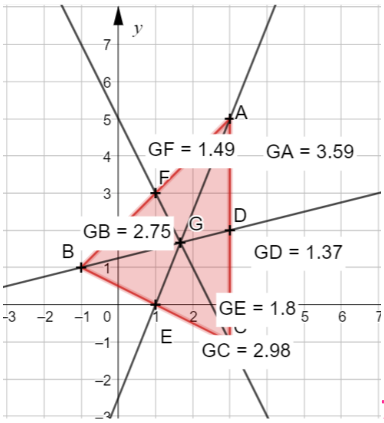
Travaux pratiques p. 68-69

1 Centre de gravité d'un triangle

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** découvrir le centre de gravité

▶ A. Avec un logiciel de géométrie dynamique

1. à 7.



7. On conjecture que GA = 2 GE, GB = 2 GD et GC = 2 GF

▶ B. Par le calcul

1. D(3;2) et E(1;0)

2. (AE) : $y=\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}$

3. (BD) : $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$

4. $G\left(\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right)$

5. (CG) : $y=-2x+5$ et (AB) : $y=x+2$

6. F(1;3)

7. F est le milieu de [AB].

8. $GA^2=\frac{116}{9}$ et $GE^2=\frac{29}{9}$

soit : $GA=\frac{2\sqrt{29}}{3}=2GE$

▶ C. Généralisation

Le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection des médianes et il est aux deux tiers à partir des sommets.

2 Trapèze complet

- **Durée estimée :** 20
- **Objectif :** étudier un cas particulier

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2. ABCD est un trapèze

3. $F\left(\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$ et $H\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$

4. a) (AD) : $5x-3y+12=0$ et (BC) : $x+y-8=0$

b) $E\left(\frac{3}{2};\frac{13}{2}\right)$

5. (AC) : $x-y+2=0$ et (BD) : $x+3y-12=0$ qui donnent $G\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$

6. On a (EF) : $x=\frac{3}{2}$ et on vérifie que G et H appartiennent à (EF) donc tous les points sont alignés.

3 Crible de Mattiassevitch

- **Durée estimée :** 30
- **Objectif :** découvrir les nombres premiers

▶ A. Construction à l'aide d' un logiciel de géométrie dynamique

4. On conjecture que ces droites coupent l'axe des ordonnées en des points dont l'ordonnée n'est pas un nombre premier

▶ B. Généralisation

1. $A(a;a^2)$ et $B(b;b^2)$

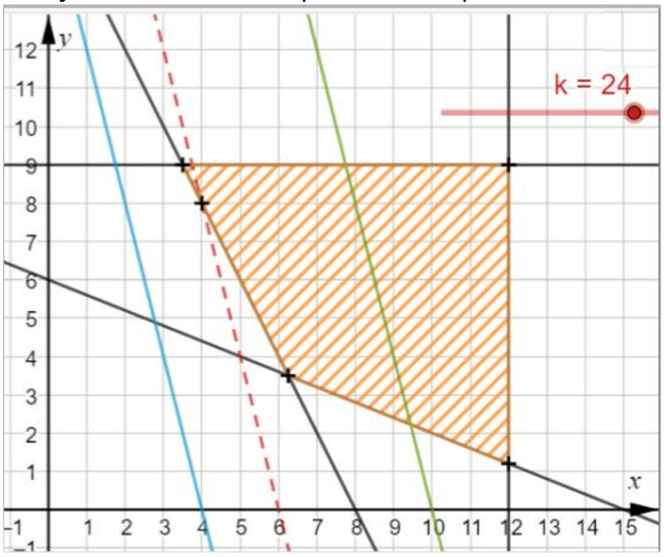
2. (AB) : $y=(a+b)x-ab$

3. L'ordonnée à l'origine est $-ab$

4. Cette ordonnée est un produit de deux entiers donc ce n'est pas un nombre premier.

4 Optimisation

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** découvrir un problème d'optimisation



4. Le coût donne $C = 4x + y$

5. a) $4x + y = 16$ en bleu

b) Cette droite ne coupe pas le polygone des contraintes donc on ne peut pas réaliser le transport avec cette somme

6. $4x + y = 40$ en vert coupe le polygone donc cette somme est possible

7. Toutes les droites sont parallèles entre elles

8. On crée un curseur k et on le fait varier jusqu'à ce que la droite « coût » d'équation $4x + y = k$ coupe le polygone en un point à coordonnées entières. Ici on obtient une solution à 2 400 000 euros avec 4 avions de type A et 8 avions de type B

Chapitre 8 Généralités sur les fonctions, fonctions de référence

↪Manuel p.205-235

Commentaires pédagogiques

L'objectif de ce chapitre est de poursuivre le travail initié en Troisième sur les fonctions.
Dans ce chapitre sont présents :

- les notions de courbes représentatives et les méthodes liées : tracés, appartenance de points, résolution graphique d'équations et inéquations,
- la poursuite du travail sur la modélisation d'une situation par une fonction et son application dans la résolution de problème nécessitant par exemple des résolutions graphiques,
- les définitions et premiers résultats sur les fonctions de référence (fonction carré, cube, inverse et racine carrée),
- une introduction à la parité d'une fonction.

Les capacités mises en œuvre dans ce chapitre sont :

- Modéliser une situation ou résoudre un problème en utilisant une fonction.
- Tracer la courbe représentative d'une fonction,
- Utiliser l'équation de la courbe représentative d'une fonction,
- Résoudre graphiquement (ou algébriquement) des équations ou inéquations,
- Reconnaître et utiliser la parité d'une fonction,
- Connaître et utiliser les fonctions de référence : fonction carré, cube, inverse et racine carrée.

Corrigés des activités et des exercices

Pour prendre un bon départ p. 205

1 Lire des coordonnées

$A(3;20)$; $B(4;40)$ et $C(-1;30)$

2 Lire des images et des antécédents

a) L'image de 8 est 4.

b) $f(4)=1$.

c) Les antécédents de 1 sont 0 ; 4 et 7.

3 Résoudre des équations

a) $\mathcal{S}=\{5,5\}$

b) $\mathcal{S}=\{-2;7\}$

c) $\mathcal{S}=\{-0,5\}$ (la valeur interdite étant –10).

d) $\mathcal{S}=\{3\}$

e) $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{8}\right\}$

f) $\mathcal{S}=\left\{-\sqrt{10};\sqrt{10}\right\}$

4 Calculer des images et des antécédents

1. a) $f(4)=-5$ **b)** $f(0,5)=-6,75$

c) $f(-2)=-8$ **d)** $f(21)=3,5$

2. a) 30 **b)** 4 **c)** 17 **d)** 14

5 Utiliser un programme de calcul

1. Avec 9, on trouve le résultat 19.

2. Le résultat final est $(x-5)^2+3$.

6 Modéliser avec une expression algébrique

L'aire de BMNP est donnée par $x(6-x)=6x-x^2$ pour $x\in[0;5]$.

1 Modéliser une situation avec une fonction

• **Durée estimée :** 25 min

• **Objectif** : comprendre l'apport d'une formule et d'une fonction pour étudier une situation dans laquelle une grandeur varie.

▶ A. Vers une formule

1. Comme il y a 60 m de bordures, la largeur ne peut pas dépasser 30 m (et dans ce cas-là la longueur serait nulle).

2. Si la largeur mesure 4m, la longueur mesure 52m et donc l'aire sera égale à $4\times52=208\,\text{m}^2$

3. Si la largeur mesure x m, la longueur mesure $60-2x$ m et donc l'aire sera égale à $x\times(60-2x)$.

▶ B. Utilisation de la formule

1. On a écrit **=A2*(60-2*A2)** par exemple.

2. a) C'est vrai d'après la courbe, pour une valeur de x proche de 4 et pour une autre proche de 26.

b) Cela semble vrai d'après le graphique et lorsque l'on regarde le résultat dans le tableau 2 quand $x=5$.

c) C'est faux d'après la courbe, l'aire ne peut pas atteindre 500 m².

3. Avec 30 m de bordures la fonction serait définie par $f(x)=x(30-2x)$ pour $x\in[0;15]$.

On teste plusieurs valeurs :

x	0	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	0	52	88	108	112	100	72

On remarque avec ces tests que l'aire ne semble pas atteindre 150 m².

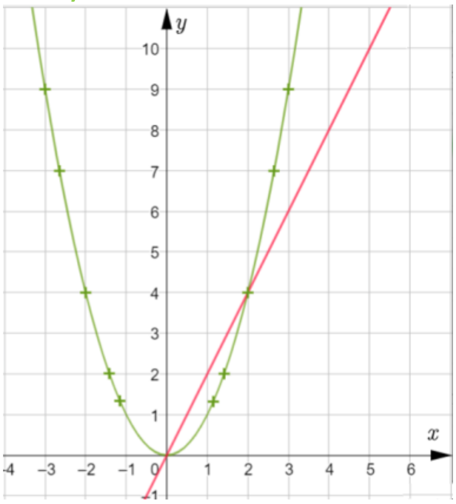
Dans la question « Pour aller plus loin », on ne peut pas justifier précisément à ce stade le fait de ne pas atteindre 150 m². Une courbe peut aussi être utilisée pour mieux visualisée. Le but est ici de tester et observer.

2 Découvrir la notion d'équation de courbe

• **Durée estimée :** 20 min

• **Objectif :** travailler autour de l'appartenance d'un point à une courbe et du lien entre abscisse et ordonnée donnant l'équation d'une courbe.

1. 2.a)



b) Comme $2\times x_R=2\times250=500\neq501$ le double de l'abscisse de R n'est pas égale à son ordonnée donc R n'appartient pas à cet ensemble.

3. a) Voir ci-dessus (la courbe n'est pas demandée).

b) Une équation de cet ensemble est $y=x^2$.

C'est la représentation graphique de $x\mapsto x^2$.

c) Le carré de l'abscisse de S est $15^2=225$ donc est égale à son ordonnée.

Donc S appartient à cet ensemble.

4. Par exemple :

```
x=float(input("Saisir l'abscisse du point"))
y=float(input("Saisir l'ordonnée du point"))
if y == x**2+x-3:
    print("il appartient à l'ensemble")
else :
    print("il n'appartient pas à l'ensemble")
```

3 Découvrir les fonctions de référence

• **Durée estimée :** 20 min

• **Objectif :** à travers un exercice de logique, manipuler les fonctions carré, cube, inverse et racine carrée.

1. a) Vrai : $g(-10)=(-10)^3=-1000$.

Donc $g(x_A)=y_A$ et donc la courbe représentative de la fonction cube passe par le point A.

b) Vrai : aucun nombre réel n'a une image strictement négative par la fonction carré. Cela signifie que tous les points sont sur ou au-dessus de l'axe des abscisses.

c) Faux. On peut tracer les deux courbes et on remarque par exemple que le point $B(0,5;0,25)$ appartient à la courbe de la fonction carré (car $0,5^2=0,25$) et que $C(0,5;\sqrt{0,5})$ appartient à la courbe de la fonction racine carrée. Or $\sqrt{0,5}\approx 0,7$ ce qui nous dit que le point C est-dessus du point B, leurs abscisses étant égales.

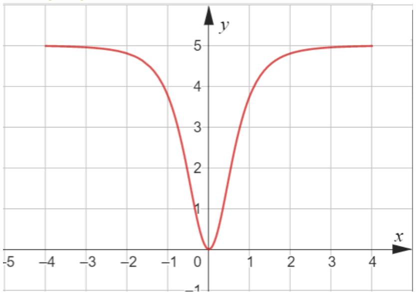
d) Vrai : elles passent toutes par le point $n(1;1)$ car $f(1)=g(1)=h(1)=m(1)=1$.

2. Non elle ne la vérifie pas car si on prend par exemple $x_1=1$ et $x_2=1$ alors : $f(1+1)=(1+1)^2=4$ et $f(1)+f(1)=2$.

4 Découvrir la notion de parité

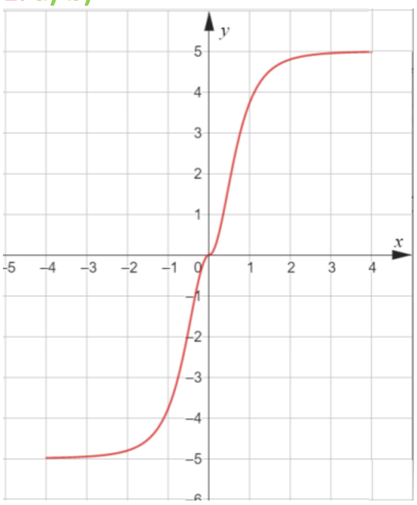
- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** découvrir les définitions de fonctions paire et impaire et le lien avec les symétries de courbes.

1. a) b)



c) On peut dire que $g(-x)=g(x)$.

2. a) b)



c) Il semble que $h(-1)=-h(1)$; $h(-2)=-h(2)$ et $h(-x)=-h(x)$

3. La première (bleue) semble être celle d'une fonction paire à cause de la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
La deuxième (orange) n'est pas la courbe d'une fonction (un nombre ne peut pas avoir deux images).
La troisième (verte) semble être celle d'une fonction impaire à cause de la symétrie par rapport à l'origine.
La quatrième (rouge) est celle d'une fonction ni paire ni impaire (pas de symétrie caractéristique).

4. Pour tout $x\in[-4;4]$, on a :

$$g(-x)=5-\frac{5}{\left(1+(-x)^2\right)^2}$$

$$=5-\frac{5}{\left(1+x^2\right)^2}$$

car $(-x)^2=x^2$ ce qui fait que $g(-x)=g(x)$ d'où le résultat.

Exercices résolus

À vous de jouer ! p. 209

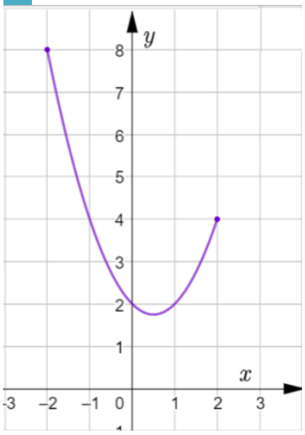
1 1. $f(x_C)=f(2)$
$=2^3-2^2=4=y_C$.
Donc $C\in\mathcal{C}_f$.

2. L'ordonnée de E est
$y_E=f(x_E)$
$=f(-3)=(-3)^3-(-3)^2=-36$.

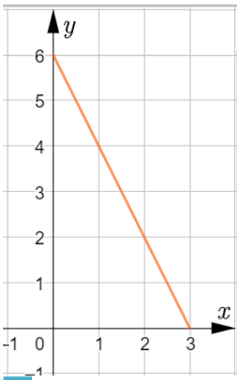
2 1. $g(x_A)=g(1,5)=1,5^2+2\times1,5-4$.
$=1,25\neq y_A$
Donc $A\notin\mathcal{C}_g$.

2. Ce point a pour abscisse 0.
On calcule donc $g(0)=-4$
donc l'ordonnée de ce point est -4.

3 On obtient la courbe suivante.



4 La fonction étant affine, on sait que la courbe représentative sera une droite.
On obtient la courbe suivante.



5 **a)** $\mathcal{S} =]2;4[$.
b) $\mathcal{S} = [-2;2] \cup [4;5]$.

6 **a)** $\mathcal{S} = [-2;0]$.
b) $\mathcal{S} =]2;5[$.
c) $\mathcal{S} = [-2;3] \cup [4;5]$.

7 **a)** La solution est $x = \sqrt[3]{125} = 5$.
b) La solution est $x = 10^2 = 100$.

8 **a)** La solution est $x = \sqrt[3]{25} \approx 2{,}92$.
b) Il n'y a pas de solution (une racine carrée ne peut pas être négative).

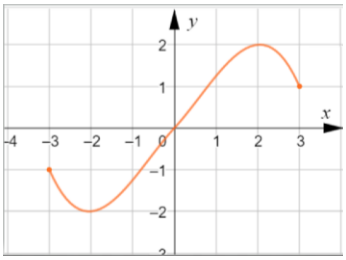
9 **a)** $\mathcal{S} = \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.
b) $\mathcal{S} =]25;+\infty[$.
c) $\mathcal{S} =]2;+\infty[$.

10 **a)** $\mathcal{S} =]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$
b) $\mathcal{S} =]-\infty\,;10]$.
c) $\mathcal{S} = [0\,;10\,000]$.

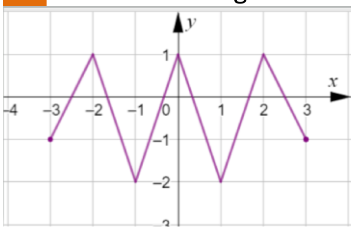
11 La fonction *f* semble être paire (elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées).

12 La fonction g ne semble ni paire, ni impaire (absence de symétrie caractéristique).

13 On obtient la figure suivante.



14 On obtient la figure suivante.



15 **a)** $\mathcal{S} = \{1\}$.
b) $\mathcal{S} = [1;5]$.

16 **a)** $\mathcal{S} = \{-1;1;5\}$.
b) $\mathcal{S} =]-1;1[\cup]5;6]$.

Exercices résolution de problèmes

p. 216

17 **Des bénéfices**
La variable est déjà posée, il s'agit du nombre de peluches *n*. On sait que les bénéfices se calculent en soustrayant les coûts aux recettes. Sachant qu'une peluche est vendue 26 euros, alors les recettes liées à la vente de *n* seront de $26n$ euros.

On peut rédiger ainsi :
n est la variable et représente le nombre de peluches fabriquées et vendues. n est un entier positif.
Pour n peluches fabriquées et vendues :
- les coûts de production sont égaux à $C(n) = 100 + n^2 + 4n$.
- les recettes sont données par $R(n) = 26n$.

On pose $B(n)$ les bénéfices réalisés pour la fabrication et la vente de n peluches.
On a:

$$\begin{aligned} B(n) &= R(n) - C(n) \\ &= 26n - (100 + n^2 + 4n) \\ &= 26n - 100 - n^2 - 4n \\ &= 22n - n^2 + 100 \end{aligned}$$

Donc les bénéfices de l'entreprise en fonction de n le nombre de peluches fabriquées et vendues peuvent être modélisés par la fonction B définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $B(n) = 22n - n^2 + 100$.

18 Une longueur

La longueur MC dépend de la position du point M. Elle dépend par exemple de AM.
On pose alors $x = \text{AM}$. On voit alors que $\text{MB} = 6 - x$. Comme on connaît BC on peut alors en déduire l'expression de MC grâce au théorème de Pythagore.
On peut rédiger de la façon suivante.
On pose la variable $x = \text{AM}$.
Comme $\text{M} \in [\text{AB}]$ alors $x \in [0;6]$.
On a $\text{MB} = 6 - x$.
Dans le triangle MBC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore, on a :
$\text{MC}^2 = \text{MB}^2 + \text{BC}^2$
Donc $\text{MC}^2 = (6-x)^2 + 4^2$
Donc $\text{MC} = \sqrt{(6-x)^2 + 16}$.
Ainsi la longueur MC peut être modélisée en fonction de $x = \text{AM}$ par la fonction f définie sur $[0;6]$ par $f(x) = \sqrt{(6-x)^2 + 16}$.

19 Une aire

La surface étudiée dépend par exemple de la longueur AM que l'on notera x.
La figure colorée n'étant pas une forme géométrique simple, on va plutôt calculer son aire en retranchant à l'aire du carré ABCD les aires des triangles AMN, MBE et DCE.
On peut rédiger de la façon suivante.
On pose la variable $x = \text{AM}$.
Comme $\text{M} \in [\text{AB}]$ alors $x \in [0;6]$. On a :

$\mathcal{A}_{\text{AMN}} = \frac{1}{2}x^2$ et $\mathcal{A}_{\text{MBE}} = \frac{1}{2} \times 3 \times (6-x) = 9 - 1,5x$

et $\mathcal{A}_{\text{DEC}} = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9$.

Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{NMED}} &= 36 - \frac{1}{2}x^2 - (9 - 1,5x) - 9 \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 1,5x + 18 \end{aligned}$$

Ainsi l'aire de la surface colorée peut être modélisée en fonction de $x = \text{AM}$ par la fonction f définie sur $[0;6]$ par

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1,5x + 18$.

Exercices automatismes

p. 55

Rituel 1

20 $\mathcal{S} = \{-9\}$

21 $\mathcal{S} = \{0\}$

22 Cela donne 45 (on ajoute sa moitié).

23 Le nouveau prix de la plante est
20 −2 = 18 €

24 $\text{A}(15;-5)$

25 $\text{B}(-5;10)$

Rituel 2

26 On lit l'heure sur l'axe des abscisses.

27 On lit la température sur l'axe des ordonnées.

28 L'unité utilisée sur l'axe des abscisses est 1 carreau pour 1 heure.

29 L'unité utilisée sur l'axe des ordonnées est 1 carreau pour 0,5°C.

30 La température dépasse 12°C pour la première fois aux environs de 13 h30.

Rituel 3

31 L'antécédent de 2 par *f* est 1.

32 Par exemple 0 n'a pas d'antécédent par *f*.

33 $f(x) \geqslant 5$ pour $x \geqslant 3$.

34 $f(x) \geqslant 6$ A partir de $x \geqslant 3{,}8$ environ.

35 Le périmètre est *p*=28,4.

36 Le volume est $\mathcal{V} = 350$ cm^3 .

Rituel 4

37 $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{6}\right\}$

38 $\mathcal{S} = \{2\}$

39 On la lira sur l'axe des ordonnées.

40 On a utilisé l'échelle 10 cm pour 100 cm : c'est une échelle à 1/10e.

41 On a utilisé l'échelle 1 cm pour 1 km soit 1 cm pour 100 000cm : c'est une échelle à 1/100 000e .

Exercices d'entraînement

p. 219-226

Je consolide mes acquis

42 Équations du 1er degré

a) $\mathcal{S} = \{2{,}5\}$

b) $\mathcal{S} = \{-2\}$

c) $\mathcal{S} = \{10\}$

d) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{12}\right\}$

43 Calculs d'images et d'antécédents

1. a) 23 **b)** –5 **c)** 5 **d)** 4003

2. L'antécédent de 20 par *f* est $\frac{17}{4} = 4{,}25$.

44 On obtient le tableau complété suivant.

x	3	1	0	–2
$f(x)$	18	6	3	3

45 Images, antécédents et tableaux

1. a) 3

b) 1

c) On ne sait pas.

2. a) –3

b) 0 et 4

c) On ne sait pas.

Attention, il peut y avoir d'autres antécédents par *f*.

46 Lecture graphique

1. a) 1 **b)** 3 **c)** 5

2. a) -3 et 3.

b) -2 et 0.

c) 6 n'a pas d'antécédent.

47 Fonctions affines, fonctions linéaires

1. Réponses **a) c)** et **d).**

2. Il s'agit de la fonction l **.**

3. Elles sont représentées graphiquement par des droites (dans le cas des fonctions linéaires ces droites passent par l'origine du repère).

48 Modélisation avec une fonction

1. $M(x) = 35 + 0{,}15x$.

2. M est une fonction affine.

3. Pour cela on résout $M(x) = 320$

$M(x) = 320$

$\Leftrightarrow 35 + 0{,}15x = 320$

$\Leftrightarrow 0{,}15x = 285$

$\Leftrightarrow x = 1\,900$

Oui cela est possible si elle effectue 1 900 km supplémentaires.

49 Scratch et fonction

1. L'aire est égale à :

$$\mathcal{A}(x)=(x-2)(x+5)$$
$$=x^2+5x-2x-10$$
$$=x^2+3x-10$$

2. Il faut remplacer les pointillés de la case vide par 3 afin de retrouver le $3x$ de la formule.

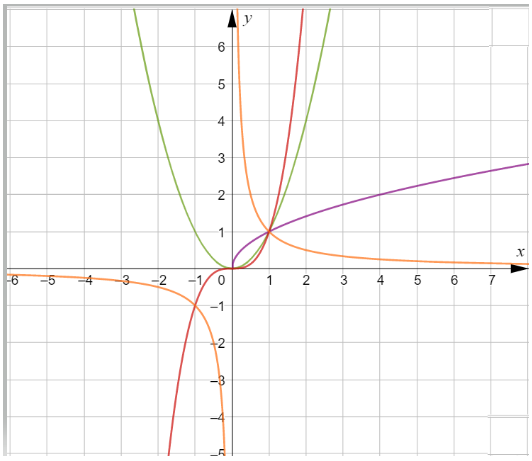
Questions de cours

50 **1.** Une équation est $y=x^2$.

2. On les appelle des paraboles.

3. Il y a la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$, la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$, la fonction racine carrée définie sur $[0;+\infty[$ et la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ dont voici respectivement les schémas des courbes représentatives :

- en vert la fonction carré,
- en violet la fonction inverse,
- en orange la fonction racine carrée,
- en rouge la fonction cube.



51 **1.** Une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{D}$ est dite paire si pour tout réel x on a $-x\in\mathcal{D}$ (son ensemble de définition est symétrique par rapport à 0) et $f(-x)=f(x)$.

2. Par exemple la fonction carré ou encore la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+2$ ou encore graphiquement tout courbe représentative de fonction étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Ensemble de définition

52 **a)** $f(0)=0$.

b) $f(2)=3\times4+14=26$

c) $f(-2)=3\times4-14=2$.

d) 20,31 n'a pas d'image car il n'est pas dans l'ensemble de définition.

53 Son ensemble de définition est $[-3;2]$.

54 $\mathcal{D}_A=[0;5]$ et $A(x)=5x+7x-x^2=12x-x^2$

55 $\mathcal{D}_g=[2;+\infty[$ et $g(x)=3x^2-2x+12$ pour tout x de cet intervalle.

56 **1.** Le calcul de la racine carrée peut poser un problème car on ne peut pas calculer la racine carrée d'un nombre négatif.

2. On en déduit que l'ensemble de définition de g est $[0;+\infty[$.

57 **a)** $]-\infty;10[\cup]10;+\infty[$ c'est-à-dire tous les nombres réels sauf 10 car on ne peut pas diviser par 10 (valeur interdite).

b) $[0;+\infty[$

c) $[2;+\infty[$ car il faut que $x-2\geqslant0$ soit $x\geqslant2$.

d) $\mathbb{R}^*$ car on ne peut pas diviser par 0 (valeur interdite).

Utilisation de l'équation d'une courbe

58 **1.a)** $f(10)=10^3+5=1\,005$.

b) Oui car $f(10)=1\,005$, l'image de l'abscisse de A est égale à l'ordonnée de A.

2. $y_B=f(x_B)=f(-2)=-3$ donc l'ordonnée de B est –3.

59 **1.** Une équation de la courbe est $y=-2x^2+3x$.

2.a) $f(1)=1$ donc A appartient à la courbe.

b) $f\left(\frac{1}{2}\right)=1\neq-\frac{1}{2}$ donc B n'appartient pas à la courbe.

c) $f(-3)=-27\neq-30$ donc C n'appartient pas à la courbe.

d) $f(-10^2)=-20\,300\neq-170$ donc D n'appartient pas à la courbe.

60 **1.** Son ordonnée est $y_R=g(2)=5\times2+2=12$.
2. Pour cela on a $y_T=0$ c'est-à-dire $5x_T+2=0$. On trouve $x_T=-\frac{2}{5}$.

61 **1.** $y=\frac{2x+4}{x+1}$.
2. $f(0)=\frac{2\times0+4}{0+1}=4\neq5$ donc $A\notin\mathcal{C}_f$.
3. $\frac{2x+4}{x+1}=0\Leftrightarrow2x+4=0$ et $x\neq-1$.
$2x+4=0\Leftrightarrow x=-2$ donc $x_B=-2$.

62 D'après l'énoncé, on a $y_B=5$. On résout donc $\frac{4x+6}{1+x}=5\Leftrightarrow4x+6=5(1+x)$ et $x\neq-1$.
$4x+6=5+5x\Leftrightarrow x=1$ donc $x_B=1$.

63 **1.** $g\left(\frac{2}{3}\right)=(4-2)(2+5)=14\neq5$ donc $M\notin\mathcal{C}_f$.
2. $y_R=g(x_R)=g(2)=110$.
3. On résout $g(x)=0$
$\Leftrightarrow(6x-2)(3x+5)=0$
$\Leftrightarrow6x-2=0$ ou $3x+5=0$
$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ ou $x=-\frac{5}{3}$
Les abscisses des points S et T sont $\frac{1}{3}$ et $-\frac{5}{3}$.

64 **a)** Faux. Pour trouver les coordonnées des points appartenant à la courbe d'ordonnée égale à 10, on résout
$10=x^2+1\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow x=3$ ou $x=-3$.
Il y a donc deux tels points.
b) Faux. Par exemple le point d'abscisse -0,5 a pour ordonnée
$y=(-0{,}5)^2+3\times(-0{,}5)+1=-0{,}25$, ordonnée qui est donc négative.

65 A appartient à la courbe donc $f(5)=22$ c'est-à-dire $25+15+p=22$ donc $p=-8$.

66 Pour l'intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0)=15$ donc $A(0;15)$.
Pour l'intersection avec l'axe des abscisses :
$f(x)=0\Leftrightarrow x=7{,}5$ soit $B(7{,}5;0)$.

67 Pour l'intersection avec l'axe des ordonnées : $h(0)=60$ donc $A(0;60)$.
Pour l'intersection avec l'axe des abscisses :
$h(x)=0\Leftrightarrow(x-2)(2x-30)=0\Leftrightarrow x=2$ ou $x=15$
soit deux points d'intersection $B(2;0)$ et $C(15;0)$.

68 **1.** Pour cela on résout $f(x)=31$
$\Leftrightarrow(x-1)^2-5=31\Leftrightarrow(x-1)^2-36=0$
$\Leftrightarrow(x-1-6)(x-1+6)=0$
$\Leftrightarrow(x-7)(x+5)=0\Leftrightarrow x=7$ ou $x=-5$
Les abscisses de ces deux points sont 7 et –5.
2. Pour cela on résout $f(x)=31$
$\Leftrightarrow x^2-7x+31=31$
$\Leftrightarrow x^2-7x=0$
$\Leftrightarrow x(x-7)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=7$
Les abscisses de ces deux points sont 0 et 7.

69 **1.** $3\times(-2)^2+2\times(-4)-4=12-8-4=0$
donc A appartient à cette courbe.
2. $x=0$ donc $2y-4=0$ soit $y=2$ est l'ordonnée de B.
3. $3x^2+2y-4=0$
$\Leftrightarrow2y=-3x^2+4\Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}x^2+2$.
C'est donc la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+2$.

70 $yx^2+y-1=0$
$\Leftrightarrow y(x^2+1)=1\Leftrightarrow y=\frac{1}{x^2+1}$.
C'est donc la courbe de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

Tracés de courbes

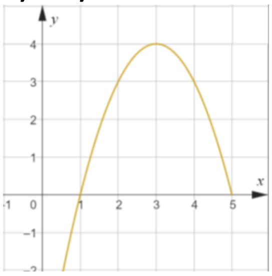
71 On obtient le tableau de valeurs complété suivant.

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0
$h(x)$	-35	$-22,75$	-12	$-2,75$	5
x	0,5	1	1,5	2	
$h(x)$	11,25	16	19,25	21	

72 **1.a)** On obtient le tableau de valeurs complété suivant.

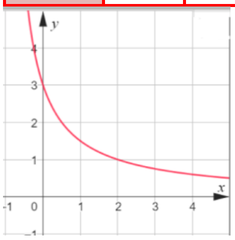
x	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$h(x)$	5	$-2,25$	0	1,75	3	3,75
x	3	3,5	4	4,5	5	
$h(x)$	4	3,75	3	1,75	0	

b) et **c)**



2. On obtient le tableau complété suivant.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$h(x)$	3	2	1,5	1,2	1	0,86
x	3	3,5	4	4,5	5	
$h(x)$	0,75	0,67	0,6	0,55	0,5	



73 **1.** On ne peut pas calculer l'image de 1. C'est une valeur interdite.

2. L'ensemble de définition de *f* est $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

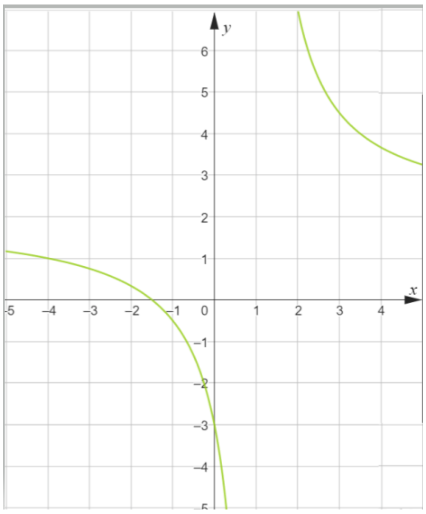
3. On obtient le tableau de valeurs complété suivant.

x	-5	-3	-2	-1
$f(x)$	1,5	1,25	1	0,5
x	0	2	4	5
$f(x)$	-1	5	3	2,75

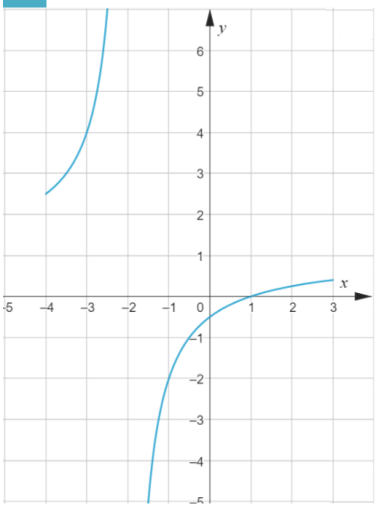
4. On obtient le tableau de valeurs complété suivant.

x	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5
$f(x)$	-4	-8	-28	32	12	8

5. On obtient la courbe suivante.



74 On obtient la courbe suivante.

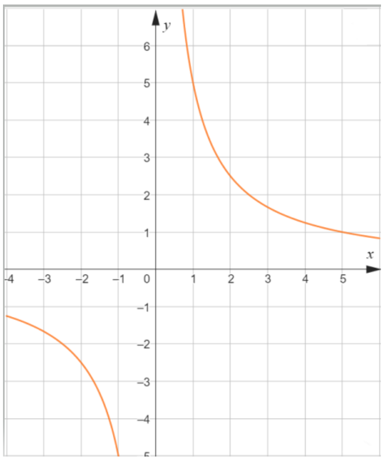


75 **1.** Non car $2\times 1,5=3\neq 5$.

2. Non car cela impliquerait $0=5$.

3. $xy=5 \Leftrightarrow y=\dfrac{5}{x}$. C'est donc la courbe de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{5}{x}$.

4. On obtient la courbe suivante.



Modélisation avec une fonction

76 **1.** $x \in [5;40]$.

2. L'ensemble de définition est $[5;40]$.

3. $P(x) = 1{,}80x$.

77 **1.** L'ensemble de définition est $\mathbb{N}$ car on doit choisir un nombre entier au départ.

2. $f(n) = (n+5) \times n + 3 = n^2 + 5n + 3$ pour tout entier naturel n.

78 **1.** $u(3) = 210$.

2. n est entier naturel et $u(n) = 150 + 20n$.

3. On résout $u(n) \geqslant 350$.

Cela est vrai pour $n \geqslant 10$.

Ce sera l'année correspondant à $n = 10$ soit en 2032.

79 **Esprit critique**

1. a) $T(0) = 16$; $T(1) = 16{,}7$ et $T(n) = 16 + 0{,}7n$.

2. On remarque, par exemple, qu'au bout de 24h, avec la formule trouvée, il fera $16 + 24 \times 0{,}7 = 32{,}8$ °C et au bout de 72h, $16 + 72 \times 0{,}7 = 66{,}4$°C. Il ne sera pas possible de chauffer autant la pièce, d'autant qu'Eva aura certainement éteint le chauffage avant. Cette expression n'a donc de sens que sur une certaine période.

L'idée de la deuxième question est de se poser des questions sur la validité d'un modèle.

80 **Modéliser une situation**

1. On pose $x = \text{AM}$.

L'aire est alors donnée par la fonction h définie par $h(x) = (7-x)(4-x)$ pour tout $x \in [0;4]$.

2. On obtient le tableau de valeurs complété suivant.

x	0	0,5	1	1,5	2
$h(x)$	28	22,75	18	13,75	10
x	2,5	3	3,5	4	
$h(x)$	6,75	4	1,75	0	

3. On peut placer M à 1,5 cm du point A.

81 **1.** $C_m(V) = \dfrac{10}{V}$.

2. $C_m(V) = \dfrac{10}{V} = 30 \Leftrightarrow V = \dfrac{1}{3}$.

3. Pour obtenir une concentration massique de 30 grammes par litre, il faut $\dfrac{1}{3} \approx 0{,}333$ litre d'eau.

82 **Décomposer un problème**

En posant $\text{AB} = x$, on a $x \in [1;50]$.

Alors $\text{AC} = x + 2$ et $\text{BC} = \sqrt{x^2 + (x+2)^2}$.

En tabulant la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + (x+2)^2}$ à la calculatrice (ou avec le tableur) de 1 à 50 avec un pas de 1, on peut déterminer les deux cas possibles :

- $\text{AB} = 6$, $\text{AC} = 8$ et $\text{BC} = 10$
- $\text{AB} = 40$, $\text{AC} = 42$ et $\text{BC} = 58$.

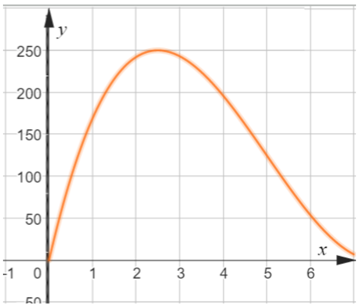
83 **1.** Il s'agit de refaire la figure avec $\text{BM} = 3$ cm.

2. Posons $x = \text{BM}$.

$x \in [0;7{,}5]$ car M ne peut pas se situer au-delà du milieu de $[\text{BT}]$.

Le volume en cm² de la boîte en fonction de x est modélisé par la fonction V définie par $V(x) = \ell \times L \times h = (15-2x)^2 x$ pour tout $x \in [0;7{,}5]$.

On peut alors tracer (à l'aide de la calculatrice) la courbe de la fonction V :



On remarque alors que le volume peut être égal à 100 cm^3 pour $x \approx 0{,}5$ et pour $x \approx 5{,}3$.

Résolution d'équations et d'inéquations

84 **a)** $\mathcal{S}=\{0;3;4\}$.

b) $\mathcal{S}=\{1;2;5;6\}$.

c) $\mathcal{S}=\varnothing$.

d) $\mathcal{S}=\{0{,}5\,;2{,}5\,;4{,}4\,;7\}$.

85 **a)** $\mathcal{S}=\{-2;0\}$.

b) $\mathcal{S}=\{-1;1\}$.

c) $\mathcal{S}=[-3;2[$.

d) $\mathcal{S}=]1;4]$.

e) $\mathcal{S}=[-3;4]$.

f) $\mathcal{S}=\{-3\}$.

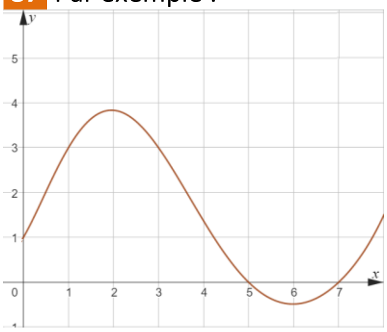
86 **a)** $\mathcal{S}=[-1{,}5;4{,}7]$.

b) $\mathcal{S}=\varnothing$.

c) $\mathcal{S}=[-5;-3[$.

d) $\mathcal{S}=\,]0\,;2{,}7[\cup]3{,}5;4{,}4[$.

87 Par exemple :



88 **1.** Pour la première fois, cela s'est produit en 2015.

2. La tendance de ligne droite semble le confirmer. Attention toutefois encore à la viabilité des modèles.

89. **1.** Graphiquement, environ $-0{,}8$ et $4{,}8$ (attention aux unités).

2. **a)** Elle se situe entre 4,8 et 4,9 d'après le tableau.

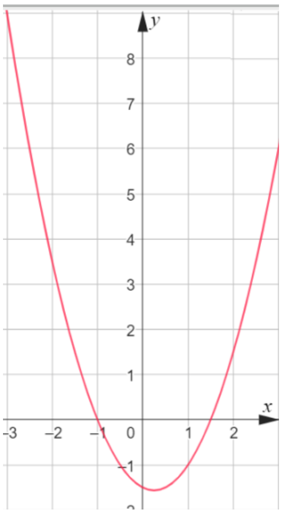
b) L'amplitude est de 0,1. On peut donner une valeur approchée d'environ 4,85 avec une précision de 0,05.

3. À l'aide du tableau de la calculatrice, on trouve que la deuxième solution est entre $-0{,}9$ et $-0{,}8$ puis entre $-0{,}83$ et $-0{,}82$ en changeant le pas.

90 **1.** On obtient :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	3,5	0	$-1{,}5$	-1	1,5	6

2. On obtient la courbe suivante.



3. $\mathcal{S}=\{-1;1{,}5\}$.

4. $f(x)=0$

$\Leftrightarrow 0{,}5(x+1)(2x-3)=0$

$\Leftrightarrow x+1=0 \text{ ou } 2x-3=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ou } x=\frac{3}{2}$.

On retrouve bien les solutions graphiques.

91 **1.** L'une des solutions est 0 et l'autre est entre 2,6 et 2,7 (en utilisant le tableau de la calculatrice).

2. $f(x)=3$

$\Leftrightarrow -1,5x^2+4x+3=3$

$\Leftrightarrow -1,5x^2+4x=0$

$\Leftrightarrow x(4-1,5x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=\dfrac{4}{1,5}=\dfrac{8}{3}$

On retrouve bien les résultats précédents.

Résolution d'équations avec les fonctions de référence

92 **1. a)** $\mathcal{S}=\{-6;6\}$

b) $\mathcal{S}=\varnothing$

c) $\mathcal{S}=\{-11\sqrt{3};11\sqrt{3}\}$

2. a) $\mathcal{S}=\{-2\}$

b) $\mathcal{S}=\{10\}$

c) $\mathcal{S}=\{\sqrt[3]{34}\}$ soit $x\approx 3,24$

3. a) $\mathcal{S}=\{36\}$

b) $\mathcal{S}=\varnothing$

c) $\mathcal{S}=\{10^8\}$

4. a) $\mathcal{S}=\{0,1\}$

b) $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$

c) $\mathcal{S}=\varnothing$

93 **a)** $x=-3\sqrt{2}$ ou $x=3\sqrt{2}$

b) $x=\sqrt[3]{115}\approx 4,86$.

c) $x=400$.

d) $x=\sqrt[3]{28}\approx 3,04$.

94 **1.a)** 16 **b)** 9 **c)** 10^6 **d)** $\dfrac{1}{4}$

2.a) $\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$

b) 8 et -8

c) n'a pas d'antécédent

d) 10^3 et -10^3

95 **1.a)** $\dfrac{1}{5}$ **b)** 10^{-2}

c) $-\dfrac{1}{3}$ **d)** 4

2.a) $\dfrac{1}{6}$ **b)** 1

c) $-0,5$ **d)** 10^{-4}

96 **1.a)** 2

b) $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

c) 10^4

d) -3 n'a pas d'image par la fonction racine carrée.

2.a) 36

b) 5

c) -5 n'a pas d'antécédent

d) 10^4

97 **1.a)** 8

b) -27 **c)** 10^{12} **d)** $\dfrac{1}{8}$

2.a) 1

b) 2 **c)** 10^4 **d)** $\sqrt[3]{-12}\approx -2,29$

98 **1.** La solution est $x=3$.

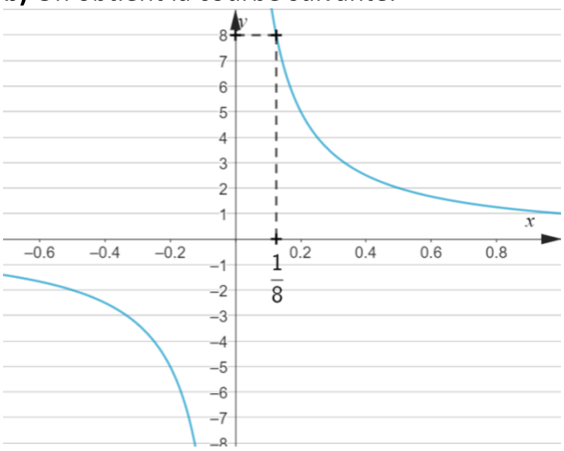
2. $(x-5)^3=27 \Leftrightarrow x-5=3$

3. La solution de l'équation est donc $x=8$.

Résolution d'inéquations avec les fonctions de référence

99 **1. a)** La solution est $x=\dfrac{1}{8}$.

b) On obtient la courbe suivante.



À l'aide du schéma, on trouve $\mathcal{S}=\left]0;\dfrac{1}{8}\right]$.

2. a) $\mathcal{S}=]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$.

b) $\mathcal{S}=[-0,5;0[$.

c) $\mathcal{S}=]-\infty;-5]\cup]0;+\infty[$.

100 **a.** $\mathcal{S}=]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[$

b) $\mathcal{S}=]-\sqrt{5};\sqrt{5}[$

c) $\mathcal{S}=]-\infty;3[$

d) $\mathcal{S}=[2;+\infty[$

e) $\mathcal{S}=[0;9]$

f) $\mathcal{S}=]81;+\infty[$

101 **1.** $2x^2+6<8 \Leftrightarrow 2x^2<2 \Leftrightarrow x^2<1$.

2. $\mathcal{S}=]-1;1[$.

102 **a)** $\mathcal{S}=]-\infty;-\sqrt{8}]\cup[\sqrt{8};+\infty[$

b) $\mathcal{S}=[0;625[$

c) $\mathcal{S}=]-\infty;2[$

d) $\mathcal{S}=]-\infty;-0,1]\cup]0;+\infty[$

e) $\mathcal{S}=\left[-\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$

f) $\mathcal{S}=]81;+\infty[$

103 **1.** Comme $f(0)=3$, on trouve $b=3$.

Comme $f(2)=5$, on trouve ensuite $a=\frac{1}{2}$.

Alors $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3$.

2. On résout $f(x)=10 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2=7 \Leftrightarrow x^2=14$

Les antécédents de 10 sont $-\sqrt{14}$ et $\sqrt{14}$.

3. $\mathcal{S}=[-\sqrt{14};\sqrt{14}]$.

Conjectures sur la parité d'une fonction

104 **a)** La fonction semble paire.
b) La fonction semble impaire.
c) La fonction semble paire.
d) La fonction ne semble ni paire, ni impaire.

105 **a)** f ne semble ni paire, ni impaire.
b) g semble paire.

106 **1.** $f(4)=14$ et $f(-4)=6$.

2. f n'est donc ni paire ($f(-4)\neq f(4)$)

ni impaire ($f(-4)\neq -f(4)$).

107 **1.** =4-2*A2^2

2. f semble être paire.

3. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $-x\in\mathbb{R}$ et :

$f(-x)=4-2(-x)^2=4-2x^2=f(x)$ ce qui justifie que f est paire.

108 **1.** $g(1)=5$ et $g(-1)=-5$.

2. g n'est pas paire car $g(-1)\neq g(1)$.

3. Non car il faut que l'égalité $g(-x)=-g(x)$ soit vraie pour tout réel x et non seulement pour $x=1$.

4. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $-x\in\mathbb{R}$ et :

$g(-x)=(-x)^3+4\times(-x)$

$=-x^3-4x=-(x^3+4x)=-g(x)$

ce qui justifie que g est impaire.

109 **1.** D'après la calculatrice, l'axe des ordonnées semble être un axe de symétrie de la courbe.

2. Pour le justifier on va montrer que la fonction h est paire.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $-x\in\mathbb{R}$ et :

$h(-x)=3(-x)^4+5=3x^4+5=h(x)$ ce qui justifie que h est paire. Donc la courbe de la fonction h est bien symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

110 D'après la calculatrice, la courbe de fonction g semble être symétrique par rapport à l'origine.

Pour le justifier on va montrer que la fonction g est impaire.

Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a $-x\in\mathbb{R}^*$ et :

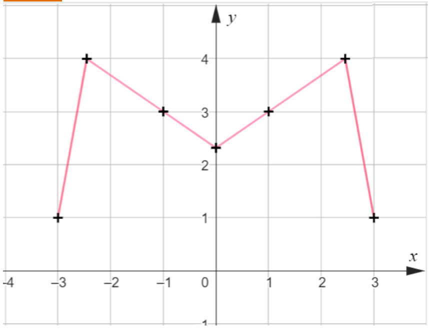
$$g(-x)=\frac{(-x)^2-1}{-x}=-\frac{x^2-1}{x}=-g(x)$$

ce qui justifie que g est impaire.

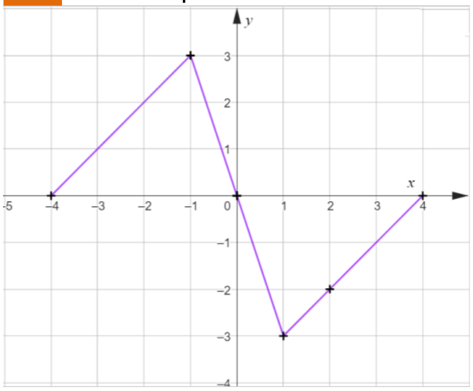
Donc la courbe de la fonction g est bien symétrique par rapport à l'origine.

Utilisation de la parité d'une fonction

111 Par exemple :



112 Par exemple :



113 **1.**

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	-14	-1	0	1	14

2. $g(1)=1$ donc $a\times 1^3-1=1$ donc $a=2$.

114 f est définie sur $\mathbb{R}$ et comme f est impaire, on a $f(-0)=-f(0)$.

Or $f(-0)=f(0)$ cela veut dire que $f(0)=-f(0)$ donc $2f(0)=0$ donc $f(0)=0$.

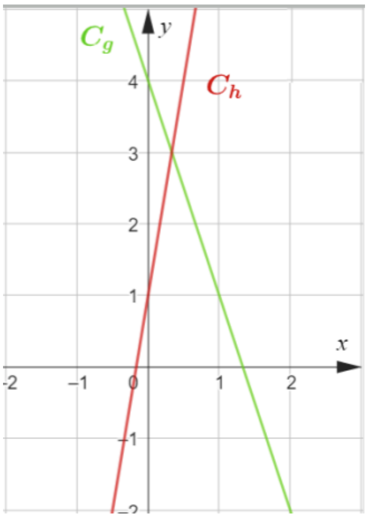
Résolution de $f(x)=g(x)$, $f(x)\geqslant g(x)$

115 **a)** $\mathcal{S}=\{-1;2\}$

b) $\mathcal{S}=[-2;-1]\cup[2;3]$

c) $\mathcal{S}=]-1;2[$

116 **1.** Ces deux courbes sont des droites car g et h sont deux fonctions affines.



2. On résout $g(x)=h(x)$.

$-3x+4=6x+1 \Leftrightarrow -9x=-3 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$.

De plus $g\left(\dfrac{1}{3}\right)=3$. Donc $\mathrm{M}\left(\dfrac{1}{3};3\right)$.

3. $g(x)>h(x) \Leftrightarrow -3x+4>6x+1 \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{3}$.

117 **1.** La fonction affine g est représentée par la droite verte, et la fonction carré est représentée par la parabole orange.

2. Graphiquement, $\mathcal{S}=\{-2;3\}$.

3. a) $(x-3)(x+2)=x^2-x-6$

b) $x^2=x+6$

$\Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2)=0$

Les solutions sont -2 et 3.

118 **1.** On résout

$2x^2+2x+6=2x^2-3x+7 \Leftrightarrow 5x=1$.

Le point d'intersection est $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{5};6{,}48\right)$.

2. On résout $\dfrac{1}{x}=\dfrac{2+3x}{x} \Leftrightarrow 1=2+3x$ et $x\neq 0$.

Le point d'intersection est $\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{3};-3\right)$.

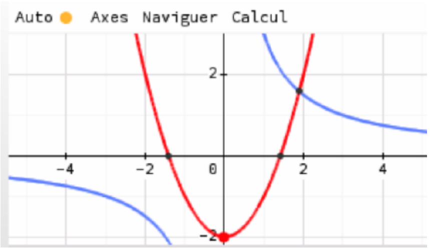
119 **Histoire des sciences**

1. Si on remplace x par 0 dans le membre de droite, on obtient -3 qui est différent de 0 donc 0 n'est pas solution.

2. $x^3-2x-3=0$

$\Leftrightarrow x^3-2x=3 \Leftrightarrow x(x^2-2)=3 \Leftrightarrow x^2-2=\dfrac{3}{x}$.

3.



4. D'après le graphique il semble bien n'y avoir qu'une seule solution (point d'intersection) et celle-ci vaut environ 1,9.

Fonctions et problèmes

120 **1. a)** 300 euros (3 centaines d'euros) environ.
b) 74 pièces environ.

2. $R(x)=20x$.

3. C'est une fonction affine donc elle est bien représentée par une droite. De plus,
$R(40)=800$ soit 8 centaines d'euros et
$R(80)=1600$ soit 16 centaines d'euros.
Cela correspond bien à la représentation graphique.

4. Le bénéfice est positif lorsque les recettes sont supérieures aux coûts de fabrication.
Elle doit fabriquer au maximum 76 pièces (donc entre 40 et 76 pièces) pour obtenir un bénéfice positif.

121 **1.** On a

$$f(x)=(2x-2)(x+3)$$
$$=2x^2+6x-2x-6=2x^2+4x-6$$

2. On a $2(x+1)^2-8$

$=2(x^2+2x+1)-8$

$=2x^2+4x+2-8$

$=2x^2+4x-6=f(x)$

2. a) En utilisant la forme factorisée on résout
$(2x-2)(x+3)=0$
$\Leftrightarrow 2x-2=0$ ou $x+3=0$
$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-3$
Les antécédents de 0 sont 1 et -3.

b) En utilisant la forme développée, on résout
$2x^2+4x-6=-6$
$\Leftrightarrow 2x^2+4x=0 \Leftrightarrow x(2x+4)=0$
$\Leftrightarrow x=0$ ou $2x+4=0$
$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-2$
Les antécédents de -6 sont 0 et -2.

c) $f(0)=-6$ d'après la forme développée ;
$f(1)=0$ d'après la forme factorisée et
$f(\sqrt{3}-1)=-2$ d'après la formule de la question **2.**

d) On résout $f(x)=24$ avec l'expression de la question **2.**
$2(x+1)^2-8=8$
$\Leftrightarrow (x+1)^2=16$
$\Leftrightarrow x+1=4$ ou $x+1=-4 \Leftrightarrow x=3$ ou $x=-5$
Les abscisses de ces points sont 3 et -5.

122 **1. a)** $h(3)=30$ donc la hauteur du projectile est de 30 mètres au bout de 3 secondes.

2.

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$h(t)$	0	11,25	20	26,25	30	31,25
t	3	3,5	4	4,5	5	
$h(t)$	30	26,25	20	11,25	0	

3. À l'aide de la calculatrice, on trouve que $h(t)\geqslant 10$ pour $t\in[0,44;4,56]$.
La fusée reste donc à une altitude supérieure ou égale à 10 m pendant 4,12 secondes.

4. On résout $h(t)=0$ c'est-à-dire
$25t-5t^2=0 \Leftrightarrow 5t(5-t)=0$
$t=0$ (c'est le moment où la fusée décolle) ou $t=5$ qui signifie que la fusée retombe au bout de 5 secondes. Cette modélisation a du sens sur $[0;5]$.

123 **1.** Non car $AB=6$, l'ensemble de définition est $[0;6]$.

2. On soustrait l'aire des triangles verts à l'aire de ABCD :

$$f(x)=48-2\times\frac{AM\times AQ}{2}-2\times\frac{BN\times BM}{2}$$
$$=48-x(8-x)-x(6-x)$$
$$=48-8x+x^2-6x+x^2=2x^2-14x+48$$

3. On résout $f(x)=24$:

$2x^2-14x+48=24$

$\Leftrightarrow 2x^2-14x+24=0$.

$\Leftrightarrow 2(x-4)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=4$ ou $x=3$

À chacun son rythme

124

Énoncé A

1. $f(4)$ est l'aire du triangle MBC quand $x=4$. Cela donne

$\dfrac{BM\times BC}{2}=\dfrac{4\times 4}{2}=8$.

$g(4)$ est l'aire du demi-disque qui vaut

$\dfrac{2^2\pi}{2}=2\pi$ car le rayon vaut 2.

2. L'ensemble de définition est $[0;8]$ car $x=AM$, $M\in[AB]$ et $AB=8$.

$f(x)$ est l'aire du triangle MBC. Donc

$f(x)=\dfrac{BM\times BC}{2}=\dfrac{(8-x)\times 4}{2}=16-2x$.

3. On résout $f(x)=10$.

$\Leftrightarrow 16-2x=10 \Leftrightarrow x=3$

Donc l'aire de MBC peut être égale à 10 lorsque $x=3$.

Énoncé B

1. L'ensemble de définition est $[0;10]$ car $x=AM$, $M\in[AB]$ et $AB=10$.

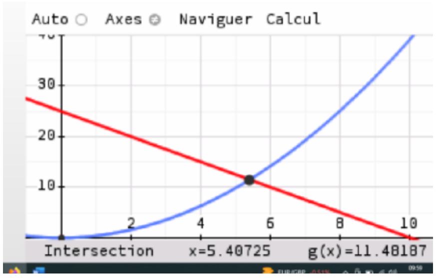
$f(x)$ est l'aire du triangle MBC, donc

$$f(x)=\frac{BM\times BC}{2}$$
$$=\frac{(10-x)\times 5}{2}.$$
$$=25-2,5x$$

$g(x)$ est l'aire du demi-disque, donc

$$g(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2\times\pi}{2}=\frac{\pi x^2}{8}.$$

2. On obtient la courbe ci-après.



3. Les deux aires sont égales pour une valeur de x proche de 5,4.

Énoncé C

1.a) On a :

$$g(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2\times\pi}{2}=\frac{x^2\pi}{8} \text{ et}$$

$f(x)=\dfrac{BM\times BC}{2}=\dfrac{(AB-x)BC}{2}$ correspond à l'expression d'une fonction affine.

Donc f est représentée par la droite verte et g par la courbe violette.

L'ensemble de définition de f est $[0;7]$ donc la valeur maximale de x est 7 ce qui veut dire que $AB=7$.

b) D'après la droite tracée, lorsque $x=0$, $f(0)=21$.

Dans ce cas, M est sur le point A. Le triangle MBC correspond alors au triangle ABC donc

$\dfrac{BC\times 7}{2}=21$ soit $BC=6$.

2. On a donc

$$g(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2\times\pi}{2}=\frac{x^2\pi}{8} \text{ et}$$

$$f(x)=\frac{BM\times BC}{2}=\frac{(7-x)6}{2}=21-3x.$$

3. Graphiquement, on peut voir que cela est vrai pour une valeur entre 4 et 5. On peut améliorer la précision avec le tableur de la calculatrice. On trouve alors $x\approx 4,43$.

L'énoncé A porte sur une fonction affine.
L'énoncé B fait davantage manipuler les expressions et une résolution graphique.
L'énoncé C est différent dans le sens où on cherche dans un premier temps à retrouver les mesures du schéma

Exercices de synthèse p. 227

125 Vrai ou faux ?

a) Vrai car c'est la définition.
b) Faux car -5 n'est pas dans l'ensemble de définition.
c) Vrai car l'image de l'abscisse est égale à l'ordonnée.
d) Vrai car c'est l'une des propriétés du cours.
e) Faux : elles sont symétriques par rapport à l'origine.

126 Point, courbe, inéquation

1. Oui il appartient à $\mathcal{C}_f$ car $f(-1)=9$.

2. $f(4)=54$ donc $B(4;54)$.

3. $f(x)=33$

$\Leftrightarrow 3x^2+6=33$

$\Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=3$ ou $x=-3$.

Il y a donc $C(3;33)$ et $D(-3;33)$.

4.a) $f(x)\leqslant g(x) \Leftrightarrow 3x^2+6\leqslant x^3+3x^2-21$

$\Leftrightarrow 6+21\leqslant x^3 \Leftrightarrow 27\leqslant x^3$.

b) $\mathcal{S}=[3;+\infty[$.

127 Lecture et calcul

A ▶ Lecture graphique

a) $\mathcal{S}=\{-2;4\}$.

b) $\mathcal{S}=]-0,2;2,2[$.

c) $\mathcal{S}=[-2;-1]\cup[3;4]$.

d) $\mathcal{S}=\{-1;1,7\}$.

e) $\mathcal{S}=\varnothing$.

f) $\mathcal{S}=[-2;-1]\cup[1,7;4]$.

B ▶ Calcul algébrique

1. $f(x)=6x-2x^2+6-2x=-2x^2+4x+6$.

2. $-2(x-1)^2+8$

$=-2(x^2-2x+1)+8$

$=-2x^2+4x+6=f(x)$.

3. a) On résout $f(x)=0$ en utilisant $(x+1)(6-2x)=0$.

$x=-1$ ou $x=3$ d'où les points de coordonnées $(-1;0)$ et $(3;0)$.

b) $f(x)=4 \Leftrightarrow -2(x-1)^2+8=4 \Leftrightarrow (x-1)^2=2$

Les antécédents sont $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$.

4. Le logiciel de calcul formel indique que $f(x)=g(x)$ pour $x=-1$ ou $x=\frac{5}{3}$.

De plus $f(-1)=0$ et $f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{64}{9}$.

Les coordonnées des points d'intersection sont $(-1;0)$ et $\left(\frac{5}{3};\frac{64}{9}\right)$.

128 Courbe et modélisation

1. L'ensemble de définition est $[0;6]$ car $x=AM$, $M\in[AD]$ et $AD=10$.

$f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{(8-x)(6-x)}{2}$

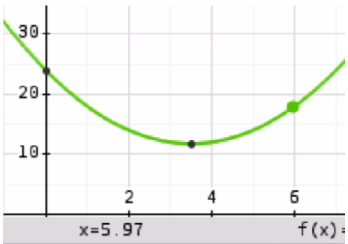
$=\frac{x^2}{2}+\frac{48-8x-6x+x^2}{2}$

$=\frac{48-14x+2x^2}{2}=x^2-7x+24$

2. On obtient le tableau de valeurs complété suivant.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	24	18	14	12	12	14	18

3. La courbe suivante est donnée à l'aide de la calculatrice.



4. Pour cela on peut placer M à 2cm ou à 5cm du point A.

129 Parité et courbe

1. h semble paire car la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. On a donc $h(1)=0 \Leftrightarrow (1-a)^2=0 \Leftrightarrow a=1$.

3. $h(x)=(x^2-1)^2$ donc

$h(1,5)=(1,5^2-1)^2=1,562\,5\neq 2$ donc le point B n'appartient pas à la courbe.

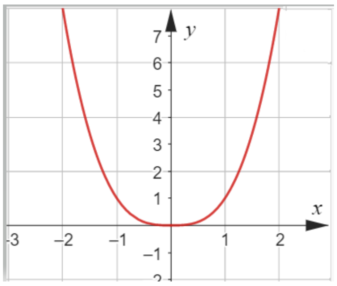
130 Fonction de référence et parité

1. a) Pour tout x, on a

$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.

b) On en déduit que la fonction cube est impaire.

2. On obtient la courbe suivante.



Exercices d'approfondissement

p. 228

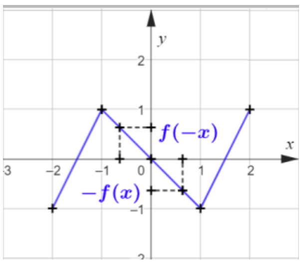
131 Symétrie et fonction impaire

Soit x un nombre de l'ensemble de définition et le point $(x;f(x))$ de la courbe représentative de f associé à x.

Montrons que son symétrique par rapport à l'origine qui a pour coordonnées $(-x;-f(x))$ appartient aussi à la courbe de f.

$-x$ est dans l'ensemble de définition.

Comme $f(-x)=-f(x)$ pour tout x, le point de coordonnées $(-x,f(-x))$ est le même que le point de coordonnées $(-x,-f(x))$. Or le point de coordonnées $(-x,f(-x))$ est un point de la courbe de f car l'ordonnée est égale à l'image de l'abscisse. Donc le point de coordonnées $(-x,-f(x))$ appartient à la courbe de f.



132 Avec un paramètre

1. $\mathcal{S}=\{-3;-1;2\}$.

2. $\mathcal{S}=\{2,7\}$.

3. Par exemple 3.

4. • Si $m<-3$ ou $m>3$, l'équation n'a pas de solution ;

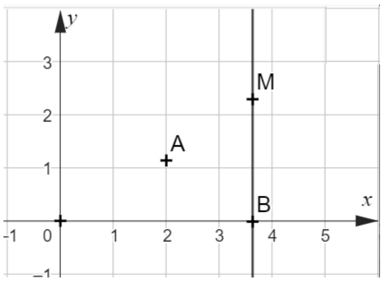
• Si $m\in[-3;-2[\cup]1;3]$, l'équation a une seule solution ;

• Si $m=-2$ ou $m=1$, l'équation a deux solutions ;

• Si $m\in]-2;1[$, l'équation a 3 solutions.

133 Parabole

1. M est à égale distance de A et (Ox). si et seulement $BM=MA$ où B est le point de coordonnées $(x;0)$:



$BM=AM \Leftrightarrow BM^2=AM^2$

$\Leftrightarrow (x-x)^2+(y-0)^2=(x-x_A)^2+(y-y_A)^2$.

$\Leftrightarrow y^2=(x-x_A)^2+(y-y_A)^2$

2. On développe le membre de droite de l'égalité précédente :

$y^2=x^2-2xx_A+x_A^2+y^2-2yy_A+y_A^2$.

Puis on isole y :

$2yy_A=x^2-2xx_A+x_A^2+y_A^2$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{x^2-2xx_A+x_A^2+y_A^2}{2y_A}$ car $y_A\neq 0$.

M appartient donc à la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=\dfrac{x^2-2xx_A+x_A^2+y_A^2}{2y_A}$: la courbe est une parabole.

134 Équation à trouver

D'après l'énoncé et l'appartenance de points à la courbe, on a le système à résoudre suivant :

$$\begin{cases} 4=0a+0b+c \\ 9=4a+2b+c \\ 42=16a-4b+c \end{cases}$$

La première équation donne $c=4$.

$$\begin{cases} c=4 \\ 9=4a+2b+4 \\ 42=16a-4b+4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=4 \\ 18=8a+4b+8 \\ 42=16a-4b+4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=4 \\ 60=24a+12 \\ 42=16a-4b+4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=4 \\ a=2 \\ 42=32-4b+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=4 \\ a=2 \\ b=-1{,}5 \end{cases}.$$

135 Analyser un problème

1. 1+3+7+1+7=19
2. 5 782, par exemple
3. Il y en a 20 au total :
- un seul à 1 chiffres : 3.
- trois à 2 chiffres : 12; 21; 30
- six à 3 chiffres : 300;120;102;201;210;111
- dix à 4 chiffres :
3 000;2 100;2 010;2001;1 200;1 020;1 002;
1 110;1 101;1 011
- zéro à 5 chiffres

4. Oui, il suffit de prendre un nombre avec autant de 1 que le nombre choisi.

136 Vrai ou faux ?

a) Vrai car si $f(x)=4$. alors $(x-a)^2=0$ donc $x=a$.

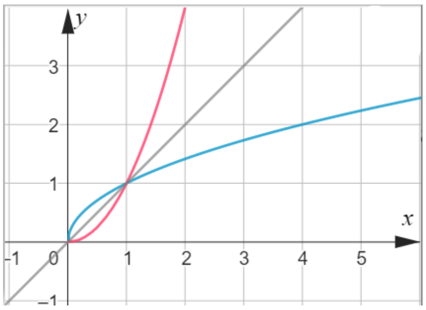
b) Faux car l'équation $f(x)=0$ ou encore $(x-a)^2=-4$ n'a pas de solution réelle.

c) Vrai car
$f(3a)=(3a-a)^2+4=4a^2+4=4\left(a^2+1\right)$.

d) Vrai en prenant $a=0$ par exemple :
$f(x)=x^2+4$ est l'expression d'une fonction paire.

137 Lien des fonctions carré et racine carrée

1. La courbe de la fonction racine carrée est en bleu.



2. Voir ci-dessus. La courbe de la droite Δ d'équation $y=x$ est en gris.

3. Voir ci-dessus. La courbe du symétrique de la fonction racine carrée par rapport à la droite Δ est en rose.

4. La fonction carré.

5. a) $\sqrt{x^2}=x$ pour tout réel x positif.

b) $(\sqrt{x})^2=x$ pour tout réel x positif.

138 Équation avec une racine carrée

$\sqrt{3x+1}=2 \Leftrightarrow 3x+1=4$ et $3x+1\geqslant 0$

La solution est $\mathcal{S}=\{1\}$.

Vers la 1re

139 Vers la Spécialité Maths

1. a) $f(a+h)=(a+h)^2=a^2+2ah+h^2$

2.
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h}=2a+h.$$

140

1. $u(1)=6$ et $u(2)=12$.

2. $u(n+1)=3\times 2^{n+1}$.

3. On trouve $n=5$ en testant avec la calculatrice.

4. $u(10)=3\,072$ donc Edith a tort.

Préparer le contrôle
Je me teste

p. 230

Objectif 1 Utiliser la courbe d'une fonction

141 A et D

142 B

143 D

Objectif 2 Connaître et utiliser les fonctions de référence

144 B

145 C

146 A C

Objectif 3 Reconnaître et utiliser la parité

147 A D

148 C

149 A C et D

Objectif 4 Modéliser avec une fonction

150 B

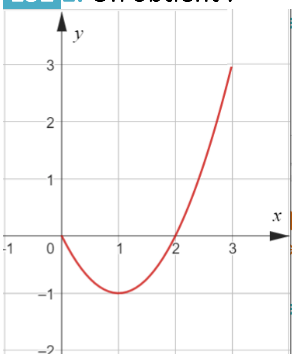
151 .C

Préparer le contrôle
Je m'entraîne

p. 231

Objectif 1 Utiliser la courbe d'une fonction

152 **1.** On obtient :



2. Non car $f(1{,}2) = -0{,}96 \neq -0{,}9$.

153 **a)** $\mathcal{S} = \{1;4\}$.

b) $\mathcal{S} = \{-0{,}5;6\}$.

c) $\mathcal{S} =]1;4[$.

d) $\mathcal{S} = [-1;2] \cup [3{,}5;6]$.

e) $\mathcal{S} = \{2\}$.

f) $\mathcal{S} =]2;6]$.

154 On résout $\dfrac{2x}{x-5} = \dfrac{4x+2}{2x+3}$.

Les valeurs interdites sont 5 et $-1{,}5$.

Pour x différent de ces valeurs, l'équation revient à résoudre

$2x(2x+3) = (x-5)(4x+2)$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 6x = 4x^2 + 2x - 20x - 10$.

$\Leftrightarrow 24x = -10 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{12}$

En injectant cette valeur dans l'une des équations, on trouve $y = \dfrac{2}{13}$.

D'où le point de coordonnées $\left(-\dfrac{5}{12};\dfrac{2}{13}\right)$.

Objectif 2 Utiliser la courbe d'une fonction

155 **a)** $x = -2$

b) $x = \dfrac{1}{6}$

c) $x = 64$

156 **a)** $\mathcal{S} = \left]-\sqrt{10};\sqrt{10}\right[$.

b) $\mathcal{S} =]-\infty;0[\cup]0{,}1;+\infty[$.

c) $\mathcal{S} = \left]\sqrt[3]{10};+\infty\right[$.

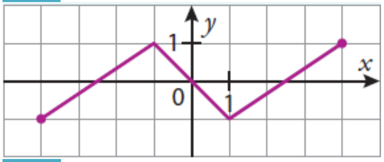
157 **a)** $\mathcal{S} = \left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$.

b) $\mathcal{S} = \left]\dfrac{1}{4};+\infty\right[$.

Objectif 3 Reconnaître et utiliser la parité

158 f semble impaire.

159 Par exemple :



160 **1.** $f(1)=6$ et $f(-1)=2$.

2. f n'est donc pas paire.

Objectif 4 Modéliser avec une fonction

161 f est définie sur $[0;10]$ par $f(x)=(x+5)^2$.

162 f est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=2x^2+5x$.

163 Si $x=\text{AD}$ (et donc $\text{AB}=9-x$), l'aire vaut $x\times(9-x)$ pour $x\in[0;9]$. On peut tracer une courbe ou faire un tableau de valeurs et on remarque qu'il faut prendre $x\in[3;6]$.

Travaux pratiques p. 232

1 Tableaux de valeurs, courbes et calculatrices

• **Durée estimée :** 30 min

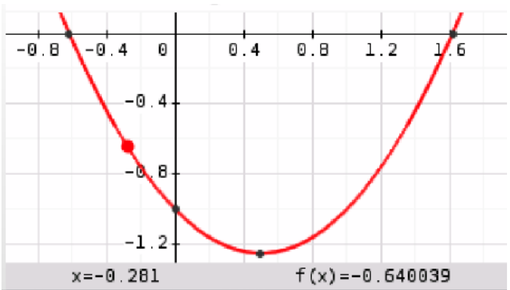
• **Objectif :** Prendre connaissance de certains outils de la calculatrice pour les fonctions : Tabuler une fonction et obtenir le tracé d'une courbe représentative. Ce TP peut être travaillé en amont de certains exercices du manuel qui demande des tableaux ou des courbes.

▶ **C. Bilan1.** L'équation a une seule solution.

2. La solution est comprise entre 4 et 5.

3. La solution est comprise entre 4,5 et 5.

4. Il semble y avoir deux solutions :

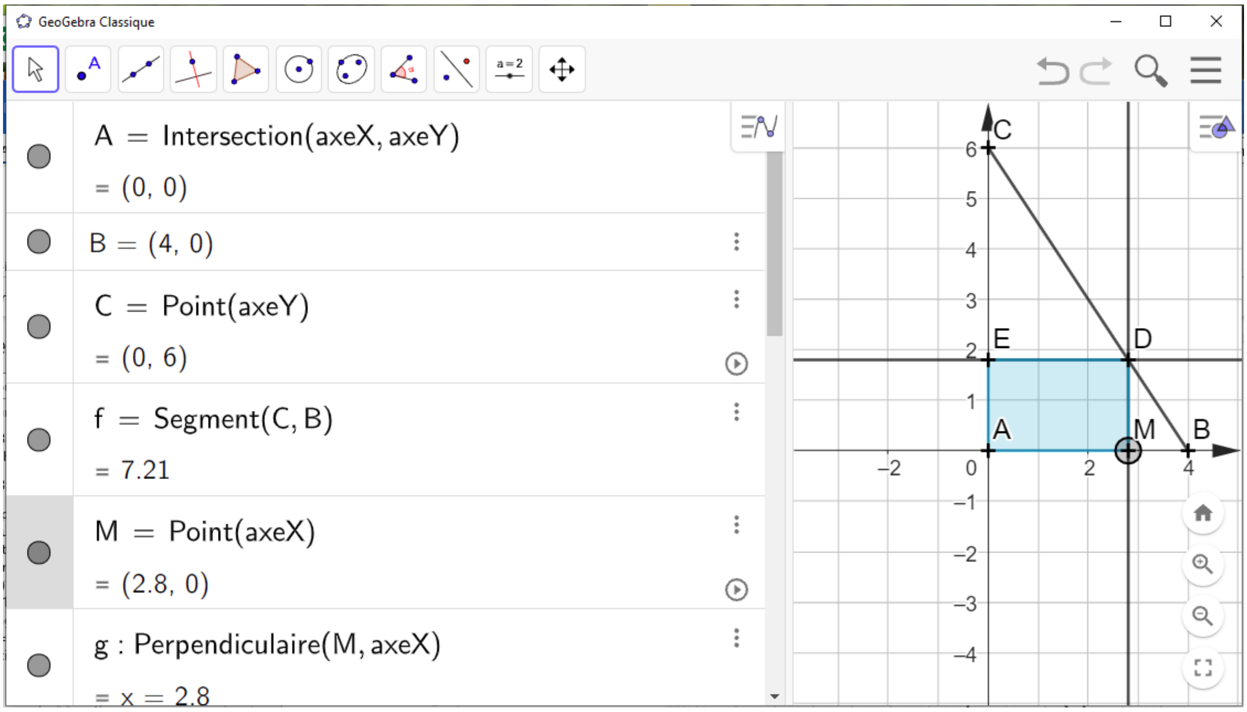


2 Étude d'une aire

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Travailler avec GeoGebra ou avec une fonction pour résoudre un problème.

▶ A. Avec GeoGebra

1.



2. Il faut placer M à une distance inférieure ou égale à 1 ou bien supérieure ou égale à 3 pour que l'aire de AMDE soit inférieure ou égale à 4,5.

▶ B. Avec des fonctions

1. On pose la variable $x = \text{AM}$. Comme $\text{M} \in [\text{AB}]$ alors $x \in [0;4]$. On a $\text{MB} = 4 - x$.

On a : (BC) et (BA) sécantes en B.

(MD) et (AC) sont parallèles avec $\text{D} \in [\text{BC}]$ et $\text{M} \in [\text{BA}]$.

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{\text{MD}}{\text{AC}} = \frac{\text{BM}}{\text{BA}} \text{ donc } \frac{\text{MD}}{6} = \frac{4-x}{4} \text{ donc } \text{MD} = 6 - 1{,}5x.$$

L'aire du rectangle MADE est donc $x \times (6 - 1{,}5x)$

Ainsi l'aire de AMDE peut être modélisée en fonction de $x = \text{AM}$ par la fonction f définie sur $[0;4]$ par $f(x) = x(6 - 1{,}5x)$.

Sa courbe à la calculatrice est donnée ci-contre.

De plus $f(1) = 4{,}5$ et $f(3) = 4{,}5$.

Ainsi on peut en déduire que l'aire de AMDE est inférieure ou égale à 4,5 pour $\text{AM} \in [0;1] \cup [3;4]$.

3 Longueur d'une portion de courbe

• **Durée estimée :** 40 min

• **Objectif :** chercher, grâce à un processus algorithmique, la longueur d'une portion de courbe.

1.

2. Elle calcule la distance entre deux points en prenant pour paramètres les coordonnées de ces points.

3. Elle calcule pour chaque valeur de i la distance entre les points de coordonnées $\left(\frac{i}{n};f\left(\frac{i}{n}\right)\right)$ et $\left(\frac{i+1}{n};f\left(\frac{i+1}{n}\right)\right)$, c'est-à-dire la longueur de chacun des petits segments entre deux points consécutifs de la courbe.

4. On remplace 2 par 1000 à la ligne 11.

5. Il affiche une valeur approchée du quart du périmètre d'un cercle de rayon 1 soit $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

6. Par exemple :

```python
import math

def f(x):
    y=x**2
    return y

def distance(xA,yA,xB,yB):
    d=math.sqrt((xB-xA)**2+(yB-yA)**2)
    return d

n=1000
longueur=0
for i in range(0,n):
    x1=-1+2*i/n
    x2=x1+2/n
    petitsegment=distance(x1,f(x1),x2,f(x2))
    longueur=longueur+petitsegment
print(longueur)
```

4 Méthode par balayage et par dichotomie

• **Durée estimée :** 60 min

• **Objectif :** introduire la méthode par balayage pour la recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation et observer sur un exemple la méthode par dichotomie.

▶ A. Méthode par balayage

1.a) α se situe entre 4,5 et 4,6 d'après le tableau.

b) L'amplitude de l'encadrement est 0,1. (La précision de α serait à 0,05 près).

2. α se situe entre 4,56 et 4,57 d'après le tableau obtenu à la calculatrice.

L'amplitude de l'encadrement est 0,01. (La précision de α serait à 0,005 près).

3. α se situe entre 4,569 et 4,57 d'après le tableau obtenu à la calculatrice.

▶ B. Méthode par dichotomie

1. On obtient :

	Initialisation				
c	X	4,5	4,75	4,625	4,5625
c^3+c	X	95,6	111,9	103,6	99,5
a	4	4,5	4,5	4,5	4,5625
b	5	5	4,75	4,625	4,625
$b-a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
Condition $b-a>10^{-1}$	Vérifiée	Vérifiée	Vérifiée	Vérifiée	Non vérifiée.

2. Le programme a effectué 5 tests.

3.a) Il faut modifier le **10**(-1)** par **10**(-3)** à la 3^{e} ligne.

b) La solution se situe entre 4,569 et 4,571.

4.a) Le programme a effectué 11 tests.

b) La méthode par balayage est simple à comprendre et à programmer. Cependant elle effectue beaucoup de calculs si la solution est proche de la deuxième borne.

La méthode par dichotomie est plus complexe et nécessite des ajustements si la fonction est croissante ou décroissante (cela dépend néanmoins du programme) mais elle est en général beaucoup plus rapide que la première méthode.

Chapitre 9 Variations et extremums

↪Manuel p.234-264

Commentaires pédagogiques

L'objectif de ce chapitre est d'introduire des outils permettant de compléter l'étude de fonctions et de résoudre des problèmes.
La notion de variation est d'abord présentée graphiquement avant d'introduire une définition précise, peu à peu utilisée dans les exercices. Les variations de fonctions dites de référence sont utilisées et permettent d'automatiser leur utilisation. Enfin, différentes notions introduites dans le chapitre 8 sont réutilisées afin d'ancrer les connaissances des élèves sur les fonctions.

Les capacités mises en œuvre dans ce chapitre sont les suivantes :
- Décrire des variations de fonction graphiquement
- Déterminer des variations de fonctions
- Déterminer un extremum
- Utiliser les variations pour résoudre un problème d'optimisation

Corrigés des activités et des exercices

Pour prendre un bon départ p. 237

1 Lectures graphiques

1. $f(2)=-1{,}5$ et $f(-3{,}5)=1{,}5$.

2. $1{,}5$ a pour antécédents $-3{,}5$ et 0.
2 a pour antécédent $-1{,}5$.

2 Calculer une image par une fonction

1. $g(2)=-3$ et $g(-3)=-8$.

2. Les antécédents de 0 sont 1 et -1.
1 a pour antécédent 0.

3 Reconnaitre une fonction

f est représentée par $\mathcal{C}_6$.
g est représentée par $\mathcal{C}_2$.
h est représentée par $\mathcal{C}_4$.
k est représentée par $\mathcal{C}_3$.
m est représentée par $\mathcal{C}_1$.
n est représentée par $\mathcal{C}_5$.

4 Travailler avec les inégalités

1. a) $\mathcal{S}=[-2;+\infty[$ **b)** $\mathcal{S}=]-\infty;-4[$

2. a) $-7<-2x+3<3$ **b)** $-7<-2x+3<7$

Activités p. 238-239

1 Étude des variations d'une fonction

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif** : Introduire la notion de variations de fonctions et les tableaux de variations.

▶ A. Description

1. a) Entre 4 h et 18 h.
b) Entre 0 h et 4 h puis entre 18 h et 24 h.

2. Sur l'intervalle $[4;18]$, la fonction est croissante.
Sur les intervalles $[0;4]$ et $[18;24]$ la fonction est décroissante.

▶ B. Tableaux de variations

1. f est représentée par la fonction C_1 et g par C_2.

2.

x	-1		$-0{,}5$		1		2
f			$0{,}5$				$1{,}9$
		↗		↘		↗	
	-1				$-1{,}2$		

x	-1		2
g	$5,5$	↘	1

x	-1		1		2
h	$1,1$	↗	$2,8$	↘	0

▶ **C. 1.** Pour une fonction croissante :

si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$

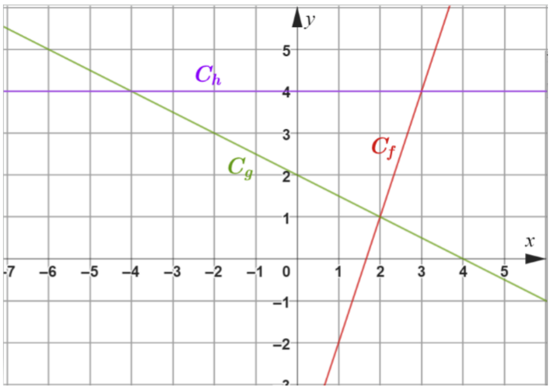
2. Pour une fonction décroissante :

si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$

2 Variations des fonctions affines

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif** : Conjecturer le sens de variations des fonctions affines.

1. On obtient les courbes suivantes.



2. f semble croissante sur $\mathbb{R}$, g semble décroissante sur $\mathbb{R}$ et h semble constante sur $\mathbb{R}$.

3. Il semble que :

- Si $a > 0$, $x \mapsto ax + b$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, $x \mapsto ax + b$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 0$, $x \mapsto ax + b$ est constante sur $\mathbb{R}$.

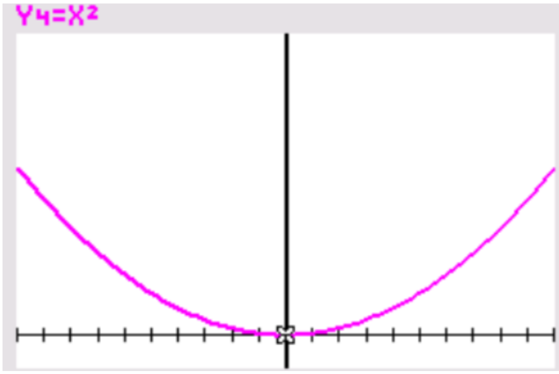
4. Si $a > 0$ et si $x_1 \leqslant x_2$ alors $ax_1 \leqslant ax_2$ puis $ax_1 + b \leqslant ax_2 + b$ donc $x \mapsto ax + b$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a < 0$ et si $x_1 \leqslant x_2$ alors $ax_1 \geqslant ax_2$ puis $ax_1 + b \geqslant ax_2 + b$ donc $x \mapsto ax + b$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

3 Variations des fonctions de référence

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif** : Déterminer les variations des fonctions de référence à l'aide de leur représentation graphique.

1. a) On obtient le tracé suivant à la calculatrice.



b)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$		↘	0	↗	

2.a)

x	0		$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	0	↗	

b)

x	$-\infty$		$+\infty$
$x \mapsto x^3$		↗	

c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$		↘	‖	↘	

3. a) $\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right) = \sqrt{b}^2 - \sqrt{a}^2 = b - a$

d'où l'égalité cherchée.

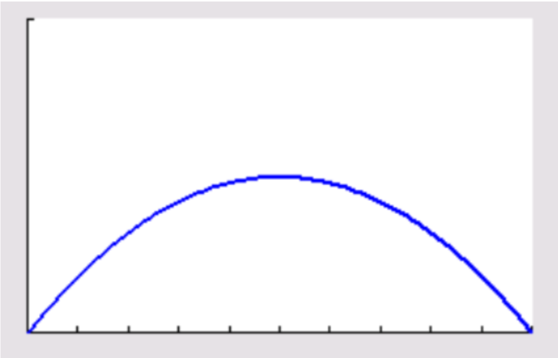
b) Si $0 \leqslant a < b$ alors $b - a > 0$ et $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$ donc le quotient est strictement positif et $\sqrt{b} > \sqrt{a}$ ce qui signifie que la fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$.

4 Extremum d'une fonction

• **Durée estimée :** 10 min

• **Objectif** : Introduire la notion de maximum et de minimum d'une fonction, par lecture graphique puis plus rigoureusement par une définition

1. a) On obtient le tracé suivant à la calculatrice.



b) La plus grande image est 25. Elle atteinte pour $x=5$.

2. a) $-(x-5)^2+25$

$=-(x^2-10x+25)+25$

$=-x^2+10x=f(x)$

b) Le carré d'un réel est positif donc $-(x-5)^2\leqslant 0$ donc $f(x)\leqslant 25$ pour $x\in[1;10]$

.

c) $f(5)=-(5-5)^2+25=0+25=25$.

d) L'image la plus grande de f est 25, atteinte en $x=5$.

3. On dit qu'une fonction f a un maximum s'il existe un nombre a tel que $f(x)\leqslant f(a)$ pour tout nombre x de l'ensemble de définition de f. Ce maximum vaut $f(a)$.

4. a) On dit qu'une fonction f a un minimum s'il existe un nombre a tel que $f(x)\geqslant f(a)$ pour tout nombre x de l'ensemble de définition de f. Ce minimum vaut $f(a)$.

b) $(x-3)^2+6$

b) $(x-3)^2+6$

$=x^2-6x+9+6$

$=x^2-6x+15=g(x)$

Le minimum de g est atteint pour $x=3$ et il vaut 6.

Exercices résolus

À vous de jouer ! p. 241

1 On obtient le tableau de variations suivant.

x	-2		-1		0		$1{,}5$
f	-4	↗	$0{,}6$	↘	-2	↗	3

2 On obtient le tableau de variations suivant.

x	-1		3
g	-2	↗	6

3 **1.** $\mathcal{D}_f=[-2;3]$.

2. $f(0)\leqslant f(2)$

3. $f(-2)\geqslant f(-1{,}5)$

4 **a)** $x\in\{0{,}5;3\}$

b) $x\in]0{,}5;3[$

c) $x\in[-4;0]$

d) $x\in]0;3]$

5 **1.** On obtient le tableau de variations suivant.

x	0		5
f	1	↘	-39

2. a) $g(x)\ =\ -3x+21$

b) $-3 < 0$ donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

6 **1.** On obtient le tableau de variations suivant.

x	0		5
f	0	↗	$2{,}5$

2. a) $g(x)=4x^2+x-(4x^2+4x+1)=-3x-1$.

b) $a=-3<0$ donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

7 **1.** f a pour maximum 3 atteint en $x=5$.
2. f a pour minimum -1 atteint en $x=1$.

8 **1.** g a pour maximum 2 atteint en $x=0$.
2. g a pour minimum -1 atteint en $x=1$.

9 **a)** $2^3 \leqslant 5^3$
b) $(-3)^3 \leqslant 11^3$
c) $(-2{,}4)^3 \geqslant \left(-\dfrac{5}{2}\right)^3$

10 **a)** $\sqrt{3} \geqslant \sqrt{2{,}5}$
b) $\sqrt{4{,}2} \geqslant \sqrt{\pi}$
c) $\sqrt{0{,}4} \leqslant \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

11 La fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$ donc $0<x_1<x_2$ implique $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$ puis $\dfrac{3}{x_1}-2 > \dfrac{3}{x_2}-2$.
f est donc décroissante sur $]0;+\infty[$.

12 La fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$ donc si $0 \leqslant x_1 < x_2$ alors $x_1^2 \leqslant x_2^2$ puis $4x_1^2 \leqslant 4x_2^2$ et $4x_1^2+1 \leqslant 4x_2^2+1$.
f est donc croissante sur $[0;+\infty[$.
On montre de même que f est décroissante sur $[0;+\infty[$.

Exercices résolution de problèmes

p. 246

13 **Variations de fonctions de référence**
f est obtenue en appliquant la fonction racine carrée suivie de la fonction cube.
On sait que la fonction racine carrée et la fonction cube sont croissante sur $\mathbb{R}$, on va utiliser ces propriétés pour comparer deux images de f.
Soit x_1 et x_2 tels que $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$.
Par croissance de la fonction racine carrée, on trouve $\sqrt{x_1} \leqslant \sqrt{x_2}$
Puis par croissance de la fonction cube,
$\left(\sqrt{x_1}\right)^3 \leqslant \left(\sqrt{x_2}\right)^3$ soit $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
f est donc croissante sur $[0;+\infty[$.

14 **Inéquations**
a) Pour résoudre ces inéquations, on va appliquer une fonction pour se ramener à une condition simple sur x.
Par croissance de la fonction carré sur $[0;+\infty[$, l'inéquation se retrouve équivalente à $x \geqslant 9$.
Les solutions sont les nombres de $[9;+\infty[$.
b) Par croissance de la fonction carré sur $[0;+\infty[$, on trouve $0 \leqslant x \leqslant 25$. Les solutions sont les nombres de $[0;5]$.
c) Par croissance de la fonction carré sur $[0;+\infty[$ et par symétrie, on trouve $-\sqrt{8} \leqslant x \leqslant \sqrt{8}$. Les solutions sont les nombres de $\left[-\sqrt{8};\sqrt{8}\right]$.

15 **Variations de fonctions enchaînées**
1. $\sqrt{f}$ est définie si $f(x) \geqslant 0$. Or d'après le tableau de variation de f, son minimum est 1 donc on a bien $f(x) \geqslant 0$.
De même, $\dfrac{1}{f}$ est définie si $f(x) \neq 0$ ce qui est bien le cas sur l'ensemble de définition de f.
2. On obtient les deux tableaux de variations suivants.

x	-1		1		4
			4		
$\sqrt{f}$		↗		↘	
	2				1

x	-1		1		4
	$\frac{1}{4}$				1
$\frac{1}{f}$		↘		↗	
			$\frac{1}{16}$		

Exercices automatismes p. 247

Rituel 1

16 $\text{OB} = \dfrac{18}{7}$

17 $\text{CD} = 7$.

18 $p = 10\pi \approx 31{,}4$.

19 $p = 16$.

20 EFDC est un parallélogramme.

21 ABFE est un trapèze.

Rituel 2

22 En abscisses, on a le temps (en heures) et en ordonnées on a la température en degrés celsius(°C).

23 Les graduations vont de 30 minutes (0,5h) en 30 minutes à partir de 0 sur l'axe des abscisses.

24 $\mathcal{A} = 16\pi \approx 50{,}26$

Rituel 3

25 $\mathcal{A} = 18$.

26 $\mathcal{S} = \{14\}$.

27 $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

28 $f(-1) = 1$ et $f(0) = 0$.

29 $f(x) > 1$ pour $x \in]1;2]$
donc à partir de $x = 1$.

30 $\mathcal{V} = 4^3 = 64$
.

31 $\mathcal{V} = 20\pi \approx 62{,}83$.

Rituel 4

32 $\dfrac{41}{45}$

33 1

34 $\mathcal{A} = 50\pi$.

35 $\mathcal{A} = 14$.

36 Oui.

Exercices d'entraînement p. 248

Je consolide mes acquis

37 Calculer une image

$f(0) = 1$; $f(-2) = -5$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{15}{4}$

38 Lire des images

1. $f(2) = -1$.
2. $f(6) = 7$.

39 Lire des antécédents

1 a pour antécédent 0 et 4 par f.
-2 n'a pas d'antécédent par f.

40 Scratch

Il teste si un nombre est un antécédent de 50 par la fonction $x \mapsto 2x + 6$.

41 Associer droite et fonction

f est représentée par d_1 ; g par d_3 et h par d_2.

Questions de cours

42 f est croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 0$; décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a < 0$ et et constante sur $\mathbb{R}$ si $a = 0$.

43 a)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

b)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

c)

x	$-\infty$		$+\infty$
$x \mapsto x^3$		$\nearrow$	

d)

x	0		$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	0	$\nearrow$	

44 f est croissante sur I si pour tous réels x_1 et x_2 de I, si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

45 On repère sur quel intervalle la courbe «monte» ou «descend» : ces intervalles constituent la première ligne du tableau. On complète alors la seconde ligne avec les flèches correspondantes et les éventuelles images.

46 Il exsite $a \in I$ tel que $f(a) = M$ et pour tout réel de I , $f(x) \leqslant M$.

Dresser un tableau de variations

47

x	-4		-1		5
f	2	$\searrow$	$-1{,}8$	$\nearrow$	2

48

x	-4		-1		1		$4{,}5$
f	2	$\searrow$	$-1{,}5$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-1{,}5$

49

x	-3		$-0{,}5$		4
f	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$1{,}5$

50 **1.** f est croissante sur $[-2;-1]$ et décroissante sur $[-1;3]$.

2. Son tableau de variations est le suivant.

x	-2		-1		3
f	$1{,}5$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-6

51 **1.** f est croissante sur $[-3;0]$ et décroissante sur $[0;4]$.

2. Son tableau de variations est le suivant.

x	-3		0		4
f	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4

52

x	-2		0		1
f	-2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0

53 **a)**

x	$-2{,}5$		-1		1		$2{,}5$
f	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

b)

x	$-2{,}2$		-1		0		$2{,}5$
f	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

c)

x	−2,5		2,5
f	−1	↗	2

d)

x	−2,5		−2		−1		−0,3		2,5
f	2	↘	1	↗	1,5	↘	0,5	↗	2

e)

x	−2		0		3
f	2	↗	3	↘	0,8

f)

x	0		1		3
f	0	↘	−0,5	↗	1,8

54

x	−2		6		10
f	0	↗	2	↘	−7

55 a)

x	2		2,5		3
f	1	↘	−5,25	↗	−5

b)

x	1		5
g	1	↘	−9,8

c)

x	−3		3
h	−25	↗	29

56 a)

x	−1		−0,7		0,7		2
f	3,5	↗	4,628	↘	0,372	↗	24,5

b)

x	0		6
g	-3	↗	1,5

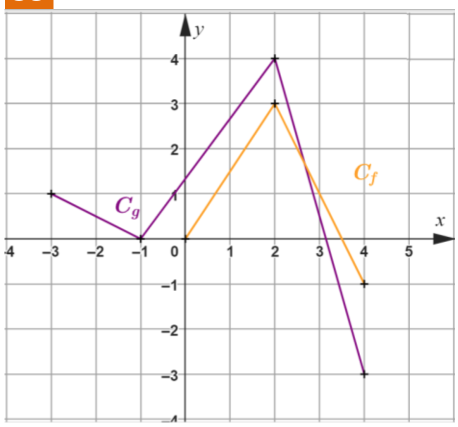
c)

x	−2		−1		0		1		2
h	8	↘	−1	↗	0	↘	−1	↗	8

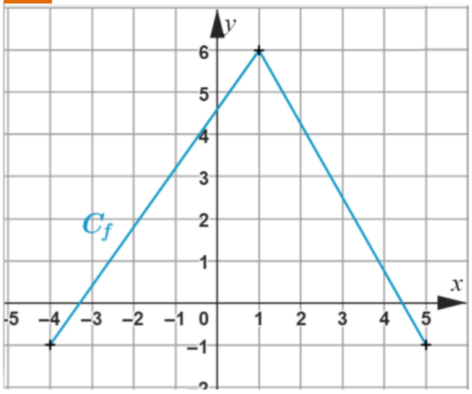
57 **a)** La fonction $\mathcal{V}$ est décroissante.
b) La fonction g est croissante.
c) La fonction h est croissante.

Courbes et variations

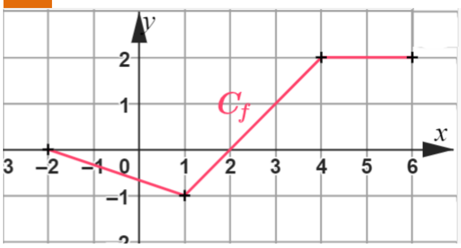
58



59



60



Parité et variations

61 **1.**

x	-2		-1		0		1		2
f	2	↘	-1	↗		↘	-1	↗	2

2.

x	-2		-1		1		2
f	2	↘	-1	↗	1	↘	-2

62 **1.** f est décroissante sur $[-4;-2]$ et croissante sur $[-2;0]$.

2.

x	-4		-2		2		4
f	$-\frac{1}{2}$	↘	-3	↗	3	↘	$\frac{1}{2}$

63 **1.** f est décroissante sur $[-5;0]$.

2. g est croissante sur $[-5;0]$.

64 **a)** Non.

b) Non

Interpréter les variations d'une fonction

65 **1. a)** f est décroissante sur $[2;4]$.

b) $f(2{,}5) \geqslant f(3)$

2. a) $f(0) \leqslant f(1)$

b) $f(3) \geqslant f(4)$

c) $f(-0{,}5) \leqslant f(-0{,}75)$

66 **1.** $f(0) \geqslant f(2)$

2.a) f est croissante sur $[3;5]$.

b) $-2 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

67 **1. a)** $f(1) \geqslant f(4)$

b) $f(5) \leqslant f(6)$

c) $f(0) = f(7)$

2. a) $-1 \leqslant f(x) \leqslant 3$

b) $-1 \leqslant f(x) \leqslant 3$

c) Attention : dans l'énoncé il faut lire "entre [–2;0]"

$2 \leqslant f(x) \leqslant 3$

68 **a)** $f(-2) \leqslant f(0)$

b) On ne peut pas savoir.

c) $f(-3) \leqslant f(4)$

d) $f(-2) \leqslant f(5)$

69 **Esprit critique**

a) $2 < \frac{10}{3}$: cela contredit les variations sur $[-2;0]$.

b) $25 > 9$: cela contredit les variations sur $[-5;2]$.

c) $-3 > -4$: les nombres de la première ligne ne sont pas rangés dans l'ordre croissant.

Variations des fonctions affines

70 **a)** $-3 < 0$ donc $x \mapsto -3x - 4$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) $-1 < 0$ donc $x \mapsto -x + 7$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) $3 > 0$ donc $x \mapsto 3x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

71 **a)** $-0{,}5<0$ donc $x \mapsto -0{,}5x+4$ est décroissante sur $]-\infty;0]$.
b) $5>0$ donc $x \mapsto 5x+6$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
c) $\frac{1}{2}>0$ donc $x \mapsto \frac{x}{2}-3$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
d) $1>0$ donc $x \mapsto -4+x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

72 **1. a)** $f(x)=x+36$
b) $g(x)=-4x+4$
c) $h(x)=38x-5$
2. f est croissante sur $\mathbb{R}$, g est décroissante sur $\mathbb{R}$ et h est croissante sur $\mathbb{R}$.

73 **a)** La fonction est croissante sur $\mathbb{R}$
b) La fonction est décroissante sur $[0;5]$.
c) La fonction est croissante sur $[1;+\infty[$.
d) La fonction est décroissante sur $\mathbb{R}$

74 A > B

75 A < B

76 **a)** $a=2$ **b)** $a=1$ **c)** $a=-3$

77 **1.** $a=2$
2. $b=-3$

78 **a)** $a=-1$
b) $b=5$

79 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
$=\frac{ax_2+b-(ax_1+b)}{x_2-x_1}$
$=\frac{a(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=a$

80 **a)** $f(x)=-7x$
b) $g(x)=\frac{1}{2}x+1$

81 **1. a)** p est croissante sur $[0;+\infty[$
b) $p(x)=2x+6$
2. $\mathcal{A}$ est croissante sut $[0;+\infty[$ et $\mathcal{A}(x)=3x$.

82 **1.** $f(t)=1{,}2t+10$.
2. f est croissante sur $[0;+\infty[$.

Déterminer graphiquement l'extremum d'une fonction

83 f a pour maximum 2 atteint en $x=-1$.

84 **1.** g admet un maximum et un minimum.
2. Le maximum de g est atteint en -2 et en 0. Le minimum de g est atteint en $x=-3$.

85 **1.** Le maximum de f est 3 atteint en $x=1$.
Le minimum de f est -3 atteint en $x=3$.
2. Il vaut 2.

86 **a)** Non.
b) Oui, il vaut -1.

87 **a)** f n'a pas de maximum.
b) f n'a pas de minimum.

88 **a)** Le coût total est de $0{,}1x^2+0{,}5x+1$ d'où le résultat.
b) Il est minimal pour 3 tonnes produites.

89 **1.** La hauteur maximale est de 112 m.
2. Elle retombe à 30 m du point de départ.

Extremum et tableau de variations

90 f a pour maximum 5 atteint en $x=3$ et pour minimum -2 atteint en $x=6$.

91 **1.** g a un maximum qui vaut 5, atteint pour $x=3$ et $x=7$.
2. g a un minimum qui vaut -2, atteint en $x=6$ et $x=7{,}5$.

92 On peut indiquer un nombre de l'intervalle $]2;5]$.

93

x	-3	3
f	-4 ↗	4

Variations d'une fonction de référence

94 1.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$		↘	0	↗	

2. a) $(2,5)^2 \leqslant \left(\frac{17}{6}\right)^2$ b) $(-3,1)^2 \geqslant \left(-\frac{7}{4}\right)^2$

3.a) $1 \leqslant x^2 \leqslant 16$ b) $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$

95 1.

x	$-\infty$		$+\infty$
$x \mapsto x^3$		↗	

2.a) $2,5^3 \leqslant 4^3$

b) $(-4)^3 \geqslant (-7)^3$

c) $\left(\frac{5}{9}\right)^3 \leqslant \left(\frac{8}{7}\right)^3$

96 a) $0 \leqslant x^3 \leqslant 8$

b) $-27 \leqslant x^3 \leqslant 216$

c) $\frac{1}{8} \leqslant x^3 \leqslant 3,375$

97 1.

x	0		$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	0	↗	

2.a) $\sqrt{5} \leqslant \sqrt{5,7}$ b) $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{\frac{5}{2}}$ c) $\sqrt{\frac{10}{3}} \leqslant \sqrt{2,7}$

98 a) $1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{3}$

b) $0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{2}$

c) $0 < \sqrt{x} \leqslant \sqrt{3}$

99 1.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$		↘	‖	↘	

2. a) $\frac{1}{2,5} \geqslant \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{-\pi} \geq \frac{1}{-3}$ c) $\frac{1}{1,5} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$

100 a) $\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{-2} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{-5}$

c) $10 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 100$

101 1. $\mathcal{V}(x) = x^3$ 2. $2 \leqslant x \leqslant 5$

Utiliser les variations des fonctions de référence

102 1. La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

103 a) $x \mapsto -2\sqrt{x}+6$ est décroissante sur $[0;+\infty[$.

b) $x \mapsto 4x^2-1$ est croissante sur $[0;+\infty[$.

c) $x \mapsto \frac{5}{x}+7$ est décroissante sur $]0;+\infty[$.

104 a) $x \mapsto 5x^3+6$ est croissante sur $\mathbb{R}$

b) $x \mapsto -2x^2-1$ est croissante sur $]-\infty;0]$ et décroissante sur $[0;+\infty[$.

c) $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{2}-4$ est croissante sur $[0;+\infty[$.

d) $x \mapsto \sqrt{x-7}$ est croissante sur $[7;+\infty[$.

105 1. $\mathcal{A}(p) = \frac{p^2}{4\pi}$.

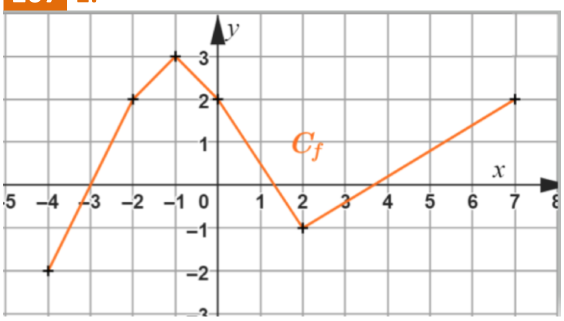
2. $\mathcal{A}$ est croissante sur $[0;+\infty[$.

Variations et inéquations

106 Rédiger une solution

a) $x \in [-2;0[$ b) $x \in [0;5]$ c) $x \in [-2;5]$

107 1.



2.a) $x \in]-2;0[$

b) $x \in [-4;-2] \cup [0;7]$

c) $x \in [-4;7]$

3.a) $-1 \leqslant f(x) \leqslant 3$ b) $-1 \leqslant f(x) \leqslant 3$

108 **1. a.** $x\in\left]-0{,}25;1\right[\cup\left]2{,}5;6\right]$

b. $x\in\left[-\frac{1}{2};-0{,}25\right]\cup\left[1;2{,}5\right]$

2. a) $-1\leqslant g(x)\leqslant 4$ **b)** $-2\leqslant g(x)\leqslant 4$

109 **a)** $x\in[4;9]$

b) $x\in[0;81[$

c) $x\in]1;+\infty[$

d) $x\in[0;16]$

e) $x\in]2{,}25;+\infty[$

f) $x=0$

110 **a)** $x\in]0;1]$

b) $x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

c) $x\in\left]-\infty;-\frac{6}{7}\right[\cup\left]0+\infty\right[$

d) $x\in]0;+\infty[$

e) $x\in\left[\frac{1}{4};2\right]$

f) $x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

Recherche d'extremum

111 **1.** $f(-1)=-4$ et $f(0)=-5$

2. $x^2\geqslant 0$ donc $f(x)\geqslant -5$

3. f a pour minimum -5, atteint en $x=0$.

112 **1.** $(x-4)^2-13$

$=x^2-4x+16-13=x^2-4x+3=f(x)$

2. $f(5)=-12$ et $f(1)=-4$.

3. $(x-4)^2\geqslant 0$ donc $f(x)\geqslant -13$.

4. $f(4)=-13$ donc avec le **3.**, f a pour minimum -13 atteint en $x=4$.

113 **1.** $-(x-3)^2+4$

$=-(x^2-6x+9)+4=-x^2+6x-9+4$

$=-x^2+6x-5=g(x)$

2. $-(x-3)^2\leqslant 0$ donc $g(x)\leqslant 4$.

3. On déduit de ce qui précède et de $g(3)=4$ que g a pour maximum 4, atteint en $x=3$.

114 **1.** $f(4)=5$

2. $f(x)\geqslant 5$ donc f a pour minimum 5 atteint en $x=4$.

115 **Esprit critique**

Si f est constante égale à m, alors $f(x)\leqslant m$ pour tout réel x et m est un maximum de f.

116 **1.** La fonction renvoie `x = 0, 2`.

2. Il suffit de remplacer les `0.1` par `0.001`.

3. Il suffit de remplacer la dernière ligne par **`return(x,a)`**.

117 **1. a)** $S(x)=2\times x\times(6-x)+x^2$

$=-x^2+12x$.

b) La surface maximale semble être de 36, atteinte en $x=6$.

c) $-(x-6)^2+36$

$=-(x^2-12x+36)+36=S(x)$.

d) On a $S(6)=36$ et $S(x)\leqslant 36$, on retrouve bien le résultat du **b.**.

2. $\mathcal{V}(x)=x\times x\times(6-x)=-x^3+6x^2$.

3. Si $x=6$, le volume est nul. Il n'y a pas d'accord possible.

118 **1.** $R(x)=1000x$.

2. $B(x)=R(x)-C(x)$

$=-0{,}5x^2+500x-25000.$

3. Le bénéfice maximal semble être de $100\,000$ atteint pour $x=500$.

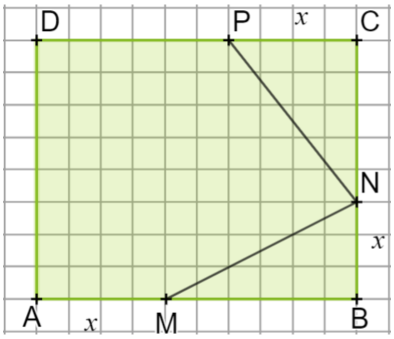
4.a) $-0{,}5(x-500)^2+100\,000$

$=-0{,}5(x^2-1000x+250\,000)+100\,000=B(x)$

b) On a $B(500)=100\,000$ et $B(x)\leqslant 100\,000$, on retrouve bien le résultat du **2.**

119 **Choisir le bon schéma**

1.



2. $0 \leqslant x \leqslant 10$ et $0 \leqslant x \leqslant 8$ donc $x \in [0;8]$.

3. $BM = 10 - x$

4. $CN = 8 - x$

5. $\mathcal{A}_{BMN} = \dfrac{BM \times BN}{2} = \dfrac{10x - x^2}{2}$.

6. $f(x) = \dfrac{10x - x^2}{2} + \dfrac{(8-x) \times x}{2} = 9x - x^2$.

7. a) $-(x-4,5)^2 + 20,25$

$= -(x^2 - 9x + 20,25) + 20,25 = f(x)$.

b) $f(4,5) = 20,25$ et $f(x) \leqslant 20,25$ donc l'aire est maximale pour $BN = 4,5$.

À chacun son rythme

120

Énoncé A

1. La fonction f est croissante sur $[0;0,5]$ et décroissante sur $[0,5;+\infty[$.

2. Elle est maximale pour $t = 0,5$.

Énoncé B

1. La courbe possible est $\mathcal{C}_1$.

2. Le minimum est 0, atteint en deux valeurs.

Énoncé B

1. L'image de 0 doit valoir 0, seule la première expression peut convenir.

2.

x	0	0,5	1
f	0 ↗	1	↘ 0

3. Le médicament ne sera présent qu'une seule heure dans l'organisme.

Exercices de synthèse

p. 256

121 Différentes variations

a) La fonction f est décroissante sur $[-2;-1,3]$, croissante sur $[-1,3;0,5]$ et décroissante sur $[0,5;2,5]$.

b) La fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) La fonction h est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.

d) La fonction k est croissante.

122 Courbe, variation et extremum

1.

x	-5	-2	0
f	4,5 ↘	0	↗ 2

2. f a pour maximum $4,5$, atteint en $x = -5$ et pour minimum 0 atteint en $x = -2$.

123 Variations et inéquations

1. f et g sont définies sur $[-1;5]$.

2. $4 \leqslant f(x) \leqslant 6$.

3. $-2 \leqslant g(x) \leqslant 4$

4. a) Ce n'est pas possible.

b) Ce n'est pas possible.

124 Reconnaissance

f est croissante sur $\mathbb{R}$.

g est croissante sur $\mathbb{R}$.

h est décroissante sur $\mathbb{R}$.

k est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.

125 Courbe, variations et tracé

1. On obtient le tableau de variations suivant.

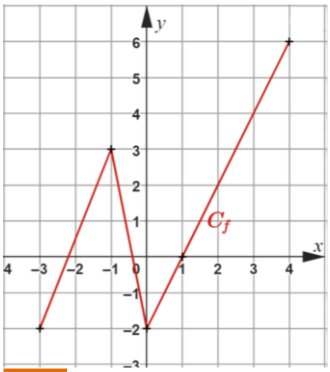
x	-3	-1	0	4
f	-2 ↗	3 ↘	-2 ↗	6

2. Le minimum de f est -2, il est atteint en $x = -3$ et $x = 0$.

3. $f(2) \leqslant f(3)$

4. $f(-2) \leqslant f(4)$

5.



126 No border

1. On a DC= 40 −2x.
Si x = 5 alors DC= 30
L'aire est de $5\times 30=150$ m².

2. $x\in[0;20]$.

3. $f(x)=-2x^2+40x$.

4. L'aire maximale semble être de 200 m².

5. a) $-2(x-10)^2+200$
$=-2(x^2-20x+100)+200=f(x)$.

b) $f(10)=200$ et $f(x)\leqslant 200$ donc on retrouve bien le résultat de la question **4.**

127 Vrai ou faux ?

a) Faux.
b) Vrai.
c) Vrai.
d) On ne peut pas conclure.
e) On ne peut pas conclure.
f) Vrai.
g) Faux.

Exercices d'approfondissement

p. 257

128 Démonstration d'une égalité

1. $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+2\sqrt{ab}+b$.

2. $\left(\sqrt{a+b}\right)^2=a+b$

$\leqslant a+2\sqrt{ab}+b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$.

3. On obtient l'inégalité demandée en raison de la croissance de la fonction racine carrée sur $[0;+\infty[$.

129 Étude de variations

1. $f(x_2)-f(x_1)$
$=x_2^2-x_1^2+2(x_2-x_1)=(x_2-x_1)(x_2+x_1+2)$.

2. a) Si $-1\leqslant x_1\leqslant x_2$ alors $x_2-x_1\geqslant 0$ et $x_2+x_1+2\geqslant 0$ donc $f(x_2)-f(x_1)\geqslant 0$.

b) On peut en déduire que f est croissante sur $[-1;+\infty[$.

130 Refaire le lien

$f(x)=x^2$ $\qquad g(x)=3x-2$

$h(x)=-2x+6$ $\qquad k(x)=\dfrac{1}{x}$.

131 Enchaînement de fonctions (1)

1. f semble croissante sur $]-\infty;0]$ et décroissante sur $[0;+\infty[$.

2.a) $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^2 \rightarrow \mathbf{x}^2+4 \rightarrow \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}^2+\mathbf{4}}$

b) On obtient le raisonnement complété suivant.

Soit a et b deux nombres positifs tels que $a<b$.

$0\leqslant a<b \Rightarrow a^2\leqslant b^2$ car la fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$

$\Rightarrow a^2+4\leqslant b^2+4$ car on ajoute 4 à chaque terme de l'inégalité

$\Rightarrow \dfrac{1}{a^2+4}\geqslant\dfrac{1}{b^2+4}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$.

3. Soit a et b deux nombres négatifs tels que $a<b$.

$a<b\leqslant 0 \Rightarrow a^2\geqslant b^2$ car la fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0]$.

$\Rightarrow a^2+4\geqslant b^2+4$ car on ajoute 4 à chaque terme de l'inégalité

$\Rightarrow \dfrac{1}{a^2+4}\leqslant\dfrac{1}{b^2+4}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$.

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_-$.

132 Enchaînement de fonctions (2)

1. f semble croissante sur chacun de ces intervalles.

2.a) $-3+\dfrac{1}{-x+2}=\dfrac{-3(-x+2)+1}{-x+2}=f(x)$.

b)

$\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}+\mathbf{2} \rightarrow \dfrac{\mathbf{1}}{-\mathbf{x}+\mathbf{2}} \rightarrow -\mathbf{3}+\dfrac{\mathbf{1}}{-\mathbf{x}+\mathbf{2}}$.

c) C'est le cas car $a=-1$.

d) On déduit de ce qui précède que $x \mapsto \dfrac{1}{-x+2}$ est croissante sur $]-2;+\infty[$, et donc que c'est aussi le cas de f.

3. Le raisonnement est identique.

133 Maximum de fonction

1. $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$.

2. On en déduit que $f(x) = -(x-3)^2 + 12$, puis que $f(3) = 12$ et $f(x) \leqslant 12$ d'où le fait que f a pour maximum 12 atteint en $x = 3$.

134 Fonction associée

Soit $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$; alors $\sqrt{x_1} \leqslant \sqrt{x_2}$ puis $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ donc f est croissante sur $[0;+\infty[$.

135 Deux moyennes

1. Il suffit de développer les deux expressions : on retrouve dans les deux cas $\dfrac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}{4}$.

2. Le terme de droite de l'égalité est le carré d'un réel donc positif, d'où l'inégalité demandée.

3. En utilisant le fait que la fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$, on trouve le fait que la moyenne arithmétique est supérieure ou égale à la moyenne géométrique.

136 Aires

1. En notant $x = \text{AM}$, l'aire vaut $\mathcal{A}(x) = \pi \times \dfrac{x^2}{8} + 1{,}5(6-x)$. Elle semble diminuer sur $[0;2]$ puis augmenter sur $[2;6]$.

2.a) Oui, pour $x = 6$.

b) Oui, pour $x = 2$.

137 Qui a raison ?

a) Emilie a raison.

b) Paul a tort.

c) Zohra a tort.

138 Variations de la fonction inverse

1. a) $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b}{ab} - \dfrac{a}{ab} = \dfrac{b-a}{ab}$.

b) Il est positif.

c) Il est positif.

d) On déduit de ce qui précède que $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} \geqslant 0$ soit $\dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$. La fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$.

2. a) Il est positif.

b) Il est positif.

c) On déduit de ce qui précède que $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} \geqslant 0$ soit $\dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$. La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$.

139 Fonction inverse

L'image de -1 par la fonction inverse est strictement négative, donc elle ne peut pas avoir de minimum positif.

Soit $m \in \mathbb{R}_-$. Alors $f\left(\dfrac{1}{2m}\right) = 2m < m$ donc f ne peut pas avoir de minimum m.

140 Fonction racine carrée

L'image de 1 par la fonction racine carrée est strictement positive, donc elle ne peut pas avoir de minimum négatif.

Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Alors $f\left((M+1)^2\right) = M+1 > M$ donc f ne peut pas avoir de maximum M.

141 Fonction carré

L'image de 1 par la fonction carré est strictement positive, donc elle ne peut pas avoir de minimum négatif.

Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Alors $f\left(\sqrt{M+1}\right) = M+1 > M$ donc f ne peut pas avoir de maximum M.

142 Modéliser à l'aide d'une indéterminée

1. $x \in [0;6]$

2. L'aire est égale à $12 + x$. Elle est maximale pour $x = 6$ et vaut alors 18. Le quadrilatère DEFC est alors un trapèze.

143 Aire et trapèze

1. L'aire du triangle ABM est représentée par $\mathcal{C}_1$, celle du triangle BCM par $\mathcal{C}_2$ et celle du triangle CBM par $\mathcal{C}_3$.

2. $f_1(x) = 4x$

$f_2(x) = -5x + 25$ et $f_3(x) = 20 + x$.

3. On a donc $\text{AB} = 4$, $\text{AD} = 5$, $\text{DC} = 5$ et $\text{BC} = \sqrt{17}$.

Vers la 1re

144 Vers la spécialité Maths

1. $a^2 \leqslant ab$

$ab \leqslant b^2$

$a^2 \leqslant b^2$

La fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$.

2. On a $a^2 \geqslant ab \geqslant b^2$ d'où le fait que la fonction carrée est décroissante sur $]-\infty;0]$.

3.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

145 Vers la spécialité Maths

1. a) f semble décroissante sur $]-\infty;2]$ et croissante sur $[2;+\infty[$.

2. En développant les images, on trouve :

$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 - (4b - 4a) = (b - a)(a + b - 4)$

3. a) Il est positif.

b) $a + b < 4$ d'où $f(b) < f(a)$

c) f est donc décroissante sur $]-\infty;2]$.

4. f est croissante sur $[2;+\infty[$.

5. f admet un minimum qui vaut 0, atteint en $x = 2$.

146 Vers STMG

1. Il serait de $B(40) = 400$ centaines d'euros soit $40\,000$ euros.

2. $-0{,}5(x - 50)^2 + 450$

$= -0{,}5(x^2 - 100x + 2\,500) + 450$

$= -0{,}5x^2 + 50x - 1\,250 + 450$.

$= -0{,}5x^2 + 50x - 800 = B(x)$

3. Le bénéfice maximal est donc de 450 centaines d'euros, pour $5\,000$ T-shirts (soit 50 centaines de T-shirts) fabriqués.

147 Vers STI2D

1. La hauteur est de 0 : la balle retombe au sol à ce moment là.

2. a) $-0{,}05(x - 9)^2 + 6{,}05$

$= -0{,}05(x^2 - 18x + 81) + 6{,}05$

$= -0{,}05x^2 + 0{,}9x - 4{,}05 + 6{,}05$.

$= -0{,}05x^2 + 0{,}9x + 2 = h(x)$

b) Il est positif.

c) La hauteur maximale est donc de $6{,}05$ m.

Préparer le contrôle
Je me teste p. 260

Objectif 1 Déterminer graphiquement le sens de variation d'une fonction

147 A

148 C et D

Objectif 2 Interpréter les variations d'une fonction

149 B et C

150 C

151 D

Objectif 3 Utiliser les variations des fonctions affines et des fonctions de référence

152 A et C

153 C

Objectif 4 Déterminer les extremums d'une fonction

154 D

155 B

156 B et C

Préparer le contrôle
Je m'entraîne p. 261

Objectif 1 - Déterminer graphiquement le sens de variation d'une fonction

157 f est croissante sur $[-5;-1]$ et décroissante sur $[-1;2]$.

x	5		-1		2
f		↗	4	↘	
	0,2				0,4

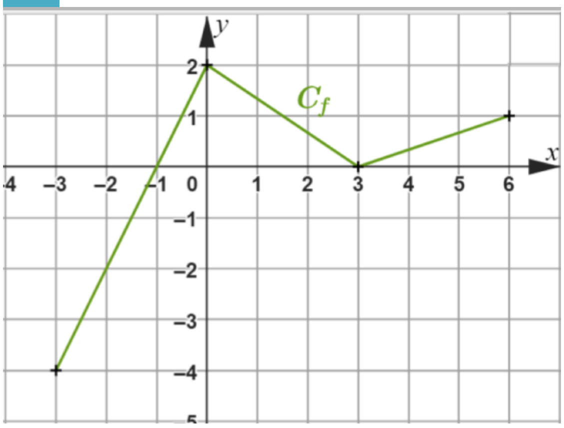
158

x	-2		4		6
f		↗	5	↘	
	-1				3

159 f est croissante sur $[0;+\infty[$.

Objectif 2 Interpréter les variations d'une fonction

160



161 **a)** $f(-4) \leqslant f(-3)$

b) $f(-1) \geqslant f(0)$

162 **a)** $x \in]1;2]$

b) $x \in [-5;1]$

Objectif 3 Utiliser les variations des fonctions affines et des fonctions de référence

163 1. **a)** $\sqrt{2} < \sqrt{\dfrac{13}{6}}$

b) $\dfrac{1}{7{,}5} < \dfrac{1}{7{,}32}$

c) $\pi^3 < 3{,}5^3$

2.**a)** $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 1$

b) $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$

164 f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

g est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.

165 1. À l'aide des variations de la fonction carré, croissante sur $[0;+\infty[$, on a montré que f est croissante sur $[0;+\infty[$.

2. f est décroissante sur cet intervalle.

Objectif 4 Déterminer les extremums d'une fonction

166 1. f a pour maximum 2 atteint en $-0{,}7$ et en $1{,}7$.

2. f a pour minimum $0{,}5$ atteint en 3.

167 1. Le maximum de f est 4.

2. Il est atteint en -3.

f admet un minimum : -7 en $x = -1$.

168 1. $-(x-2)^2 + 5 = -x^2 + 4x + 4 - 5 = f(x)$

2. $-(x-2)^2$ est négatif ou nul donc $f(x) \leqslant 5$

3. $f(2) = 5$

4. D'après les deux questions précédentes, $f(x) \leqslant f(2)$: f a un maximum.

5. Il vaut 5 et est atteint en $x = 2$.

Travaux pratiques p. 262-263

1 Distance minimale

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Le but de ce TP est d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour conjecturer un résultat, qui est ensuite démontrer.

▶ A. Expérimentation

3. Il semble que l'on doit avoir $M(0{,}2\,;1{,}4)$.

▶ **B. Résolution**

1. $AM=\sqrt{26}$.

2. $M(x;2x+1)$ donc

$AM^2=(3-x)^2+(2x+1)^2=5x^2-2x+10$.

3. Le minimum semble être égal à $9{,}8$.

4. $5(x-0{,}2)^2+9{,}8$

$=5(x^2-0{,}4x+0{,}04)+9{,}8$

$=5x^2-2x+0{,}2+9{,}8$

$=5x^2-2x+10=f(x)$

5. f et AM ont les mêmes variations car la fonction racine carrée est croissante.
D'après la question précédente, f est minimale pour $x=0{,}2$, c'est donc aussi le cas pour AM.
Il faut donc que M ait pour coordonnées $(0{,}2;1{,}4)$ pour minimiser la distance.

6. Cela se montre en utilisant la définition et le fait que la fonction racine carrée est croissante. Si $u(x_1)\leqslant u(x_2)$ alors $\sqrt{u(x_1)}\leqslant\sqrt{u(x_2)}$.

2 Boîtes de conserve et développement durable

- **Durée estimée :** 35 min
- **Objectif :** Le but de ce TP est de résoudre un problème d'optimisation en s'appuyant sur python pour obtenir une valeur approchée de la solution.

1. $\mathcal{V}=250\,\pi\approx784{,}4\text{ cm}^3$

2. a) $\mathcal{V}=h\times\pi x^2=1\,000$ d'où le résultat.

b) $S=2\times\pi x^2+h\times2\pi x$

$=2\pi x^2+\dfrac{2\,000}{x}$.

c) Avec la courbe, Il semble que la surface soit minimale pour $x\approx5{,}4\text{ cm}$ et $h\approx10{,}9\text{ cm}$.

d) Le programme complété est le suivant.

```
def rayon ():
        x=1
        a=2000/x+2*pi*x**2
        x=x+0.001
        b=2000/x+2*pi*x**2

        while a<b:
              x=x+0.001
              a=b
              b=2000/x+2*pi*x**2
        return(x)
```

e) Le programme donne `x=5.420`

f) Il suffit de donner en argument de la fonction **Python** le volume `V` et de remplacer `2000` par `2*V` dans le programme pour qu'il réponde au problème donné.

3 Bénéfice maximal

- **Durée estimée :** 55 minutes
- **Objectif :** L'objectif de ce TP est de d'utiliser les outils de la calculatrice puis **Python** pour approximer des solutions d'une équation et répondre ainsi à un problème de recherche de profit.

▶ **A. Déterminer le tableau de variations de la fonction *f***

1. On obtient le tableau complété suivant.

x	0	20	30	40	50
$f(x)$	–10 000	9 280	5 120	–240	–800

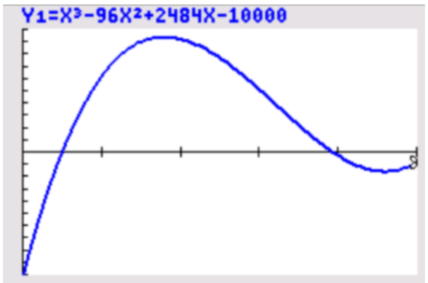
2. Non.

3. $[10;30]$

4. On obtient le tableau complété suivant.

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$f(x)$	–10 000	145	6 240	9 035	9 280	7 725	5 120	2 215	–240	–1 495	–800

5. On obtient la courbe suivante à la calculatrice



6.

x	0		18		50
f			9 440		
		↗		↘	
	−10 000				−800

▶ B. Intervalle de profit

1.

x	0		α		18		β		50
f					9 440				
		↗	0	↗		↘	0	↘	
	−10 000								−800

L'entreprise réalise des profits sur l'intervalle $[\alpha;\beta]$

2. a) $f(a)<0$ et $f(b)>0$

b) Il donne une valeur approchée de α .

c) $[4{,}9;4{,}91]$.

3. a) $f(a)>0$ et $f(b)<0$.

b) Il faut changer le `while y<0` en `while y>0`

4. $[5;39]$.

▶ C. Bénéfice maximal

1. Le programme complété est le suivant.

```
a=float(input("Entrer la valeur de a :" ))
b= float(input("Entrer la valeur de b :" ))
p= float(input("Entrer le pas :" ))
x=a
y=x+p
a=x**3-96*x**2+2484*x-10000
b=y**3-96*y**2+2484*y-10000
while a<b:
      a=b
      y=y+p
      b= y**3-96*y**2+2484*y-10000
print( "Une valeur approchée du maximum de f est M= ",a)
```

2. Il faut fabriquer 18 machines, pour 9 440 euros de bénéfice.

3. Il suffit de prendre le programme précèdent en changeant **a>b** comme condition d'arrêt pour la boucle `while` et avec **a=40** et **p=0.01** .

Chapitre 10 Signe d'une fonction

↪Manuel p.264-289

Commentaires pédagogiques

L'objectif du chapitre est d'introduire une nouvelle caractéristique d'une fonction : son signe. En commençant par une lecture graphique du signe d'une fonction, on développe le sens de la notion. Des premiers exemples d'application sont alors étudiés, avant de développer les différentes méthodes permettant de déterminer le signe d'une fonction. Un certain nombre d'exercices technique permettent d'automatiser la détermination du signe d'une fonction.
Enfin, le chapitre se finit avec différentes applications du signe, avec la résolution de problèmes faisant appel à une étude de signe ou à l'étude de positions relatives de courbes.
Tout au long du chapitre, il est régulièrement fait appel aux capacités de calculs des élèves, permettant ainsi de réactiver les différentes règles opératoires vues en début d'année ou au collège.
Les capacités mises en œuvre dans ce chapitre sont :
- Lire graphiquement le signe d'une fonction
- Interpréter un tableau de signe
- Déterminer le signe d'une fonction affine
- Déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient
- Résoudre une inéquation en étudiant le signe de l'expression.
- Étudier des positions relatives de courbes

Corrigés des activités et des exercices

Pour prendre un bon départ p. 265

1 Résoudre des équations

a) $\mathcal{S}=\{-3\}$ **b)** $\mathcal{S}=\{9\}$

c) $\mathcal{S}=\{-5\}$ **d)** $\mathcal{S}=\{3,5\}$

e) $\mathcal{S}=\{8\}$ **f)** $\mathcal{S}=\left\{\frac{20}{3}\right\}$

2 Résoudre des inéquations

a) $\mathcal{S}=\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ **b)** $\mathcal{S}=]-\infty;3]$

c) $\mathcal{S}=]6;+\infty[$ **d)** $\mathcal{S}=]-\infty;0]$

e) $\mathcal{S}=\left]-\infty;-\frac{9}{4}\right]$ **f)** $\mathcal{S}=\left[\frac{8}{3};+\infty\right[$

3 Résoudre graphiquement une inéquation

a) $\mathcal{S}=]0;4[$

b) $\mathcal{S}=[-2;-0,5]\cup[4,5;6]$

c) $\mathcal{S}=]-2;6[$

4 Développer une expression

a) x^2+x-2

b) $2x^2-10x-48$

c) $5x^2-25x-30$

d) $-8x^2-18x+5$

5 Déterminer les variations d'une fonction affine

a) f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) g est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) h est décroissante sur $\mathbb{R}$.

d) k est décroissante sur $\mathbb{R}$.

6 Factoriser une expression

$A(x)=2x(2-x)$ $B(x)=(2x-3)(x+1)$

$C(x)=(x-3)(x+3)$

$D(x)=(4-x)(4+x)$

$E(x)=(x-1)^2$

$F(t)=(2t-3)^2$

Activités

p. 266-267

1 Signe d'une fonction

• **Durée estimée :** 25 min

• **Objectif** : Le but de l'activité est d'introduire la notion de signe d'une fonction à partir d'un contexte explicite, pouvant être réutilisé pour donner du sens dans d'autres exercices.

▶ A. Températures

1. a) À 9 h et à 20h.
b) C'est le cas entre 9h et 20h.
c) C'est le cas entre 0h et 9h puis entre 20h et 24h.
2. On obtient le tableau complété suivant.

Temps (en h)	0		9		20		24
Température (en °C)		–	0	+	0	–	

▶ B. Signe d'une fonction

1.

x	-1		1		2
$f(x)$		–	0	+	

x	-2		-1		0		1		2
$g(x)$		–	0	+	0	–	0	+	

x	-1		0,8		1		3
$h(x)$		+	0	–	‖	+	

2.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		–	‖	+	

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$		+	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		+	0	+	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^3		–	0	+	

2 Signe d'une fonction affine

• **Durée estimée :** 30 min

• **Objectif :** Le but de l'activité est de dégager différentes méthodes permettant d'étudier le signe des fonctions affines.

▶ A. Étude d'exemples

1. f est représentée par d_2, g par d_3 et h par d_1.

2.

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f(x)$		–	0	+	

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$g(x)$		+	0	–	

3.a) $f(x)=0$ si et seulement si $2x=-8$ soit $x=-4$.
$f(x)>0$ si $x>-4$.
b) On retrouve le 0 dans le tableau en face du -4 de la première ligne ainsi que le signe +. On complète enfin avec la troisième possibilité, le signe –.
c) De même, g est décroissante et s'annule en -4. Enfin h est décroissante et s'annule en $x=20$, d'où ce tableau de signes.

x	$-\infty$		20		$+\infty$
$h(x)$		+	0	–	

▶ B. Généralisation

Si $a>0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		–	0	+	

Si $a<0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		+	0	–	

3 Signe d'un produit et signe d'un quotient

• **Durée estimée :** 30 min

• **Objectif :** Le but de l'activité est d'introduire les études de signe de produit et de quotient, avec une application de ces études comme approfondissement.

1.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	–	

2.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3. $f(1)\times g(1)>0$ et $\dfrac{f(2)}{g(2)}<0$.

4.a) Ils peuvent être soit tous les deux strictement positifs, soit tous les deux strictement négatifs.

b)

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

5.a) Elle n'est pas définie si le dénominateur $2x+5$ s'annule, donc pour $x=-\dfrac{5}{2}$.

b)

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$Q(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

6.a) f ne semble définie que pour un seul point, $x\approx 1$.

x	$-\infty$		$1{,}25$		$+\infty$
$-4x+5$		$+$	0	$-$	
$8x-10$		$-$	0	$+$	
$(-4x+5)(8x-10)$		$-$	0	$-$	

b) Donc l'expression $(-4x+5)(8x-10)$ est toujours strictement négative, sauf en $x=1{,}25$ où elle est nulle. C'est la seule valeur pour laquelle on peut définir la fonction f.

4 Résolutions d'inéquations

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Le but de cette activité est d'introduire l'utilisation d'étude de signe pour la résolution d'inéquations.

1. C'est la première **a)**, qui a pour solution $\mathcal{S}=\left]-\infty;-\dfrac{3}{4}\right]$.

2.a) D'après le tableau de signes : $x\in\left]-\infty;-2\right[\cup\left]3;+\infty\right[$.

b) D'après le tableau de signes : $x\in[-2;3]$.

3.a)

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $x\in\left]-0{,}5;0\right[$

4.a) $(x-2)(x+2)<0\Leftrightarrow x^2-4<0\Leftrightarrow x^2<4$.

b) En étudiant le signe de $(x-2)(x+2)$, on trouve que les solutions sont les nombres de $\left]-2;2\right[$.

5. L'inéquation revient à résoudre $\dfrac{-2x-1}{x+1}<0$ qui a pour solution $x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-0{,}5;+\infty\right[$.

Exercices résolus

À vous de jouer !

p. 269

1 **1.** $x\in\{-2\,;2\,;4\}$ et $x\in\left[-2\,;2\right[\cup\left]4\,;5\right]$

2.

x	-3		-2		2		4		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

2

x	-2		-1		3		4
$f(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

x	-3		-2		2		3
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3 **a)** Strictement positif.
b) Nul.
c) Strictement négatif.

4 **a)** $\mathcal{S}=\left]2;5\right[$
b) $\mathcal{S}=[-2;2]\cup\{5\}$

5

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$5x+10$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$-4x+1$		$+$	0	$-$	

6

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$-x+4$		+	0	−	

x	$-\infty$		-6		$+\infty$
$\frac{x}{2}+3$		−	0	+	

7

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{7}$		$+\infty$
$4x+4$		−	0	+	|	+	
$-7x+1$		+	|	+	0	+	
$(4x+4)(-7x+1)$		−	0	+	0	−	

8

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(-3x+6)$		−	0	+	0	−	

9 $\mathcal{S}=]-1;7]$

10 **a)** $\mathcal{S}=]-\infty;0[\cup]3;+\infty[$

b) $\mathcal{S}=]-1;-0{,}5[$

11 **1.** $0{,}5>0{,}5^2$

2. $\frac{11}{3}<\left(\frac{11}{3}\right)^2$

12 **1.** $\frac{\pi}{4}>\left(\frac{\pi}{4}\right)^2>\left(\frac{\pi}{4}\right)^3$

2. Attention, dans l'énoncé, il faut lire 7^3

$7<7^2<7^3$

Exercices résolution de problèmes p. 274

13 Réels inconnus

On peut poser x inconnue et traduire les conditions portant sur lui.

On rédiger la réponse ainsi :

Soit x un tel nombre. Alors $\frac{x}{x+3}\leqslant 4$,

ce qui revient à $\frac{x}{x+3}-4\leqslant 0$ et $\frac{-3x-12}{x+3}\leqslant 0$.

On étudie le signe du quotient et on trouve que les solutions sont les nombres de

$x\in]-\infty;-4]\cup]3;+\infty[$.

14 On étudie le signe de la différence pour comparer les deux quantités.

On peut rédiger ainsi la réponse :

$(x+2)^2-(2x-7)^2$

$=(x+2+2x-7)(x+2-2x+7)$.

$=(3x-5)(-x+9)$

En étudiant le signe du produit, on trouve que

$\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{C}'$ sur $\left]\frac{5}{3};9\right[$, que les courbes se croisent en $\frac{5}{3}$ et en 9 et que $\mathcal{C}$ est en dessous de $\mathcal{C}'$ sinon.

15 Une variable x est déjà introduite, on va traduire les conditions portant sur x.

On peut rédiger ainsi la réponse :

On doit avoir $\frac{x}{x+2}\leqslant\frac{1{,}75}{2}$.

Or x est positif, et $x+2$ aussi, cela se traduit donc par $2x\leqslant 1{,}75(x+2)$ ce qui donne

$0{,}25\,x\leqslant 3{,}5$ et $x\leqslant 14\,\text{m}$.

Exercices automatismes p. 275

Rituel 1

16 24

17 18

18 $f(1)=-1$ et $f(0)=1$.

19 1,5 a pour image 0 et 2 a pour image 1 par *f*.

20 $\mathcal{S}=\left\{\frac{4}{7}\right\}$

Rituel 2

21 1 a pour antécédents 0 et 2 par f.

22 2 a pour antécédent $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ par f.

0 n'a pas d'antécédent par f.

23 $\mathcal{V}=\frac{1}{3}\mathcal{S}\times h=\frac{1}{3}a^2\times h=\frac{1}{3}\times 4^2\times 5=\frac{80}{3}$

24 $\mathcal{V}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^3=\dfrac{64}{27}\approx 2{,}37$

25 $S=5$

Rituel 3

26 f devient négative pour $x=1{,}5$.

27 $\mathcal{S}=\{0\}$

28 $\mathcal{A}=\dfrac{\mathrm{AC}\times\mathrm{BC}}{2}=6$.

29 $\mathcal{A}=\dfrac{\pi R^2}{4}=9\pi\approx 28{,}3$

Rituel 4

30 En abscisses : la distance au sol entre la balle et le joueur.
En ordonnées : la hauteur de la balle.

31 Un carreau représente 15 m.

32 La hauteur maximale atteinte par la balle est de 30 m.

33 $\mathcal{S}=\{3\}$.

34 $\mathcal{S}=\{-2\}$.

35 $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{6}{13}\right\}$.

Exercices d'entraînement p. 276-281

Je consolide mes acquis

36 Résolution d'équations du premier degré

a) $\mathcal{S}=\{-4\}$ **b)** $\mathcal{S}=\{6\}$

c) $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{4}{5}\right\}$ **d)** $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

37 Développer et réduire

a) $-2x^2+8x$ **b)** x^2-6x-7

c) $-2x^2+50$ **d)** $3x^3+3x^2-12x$

38 Factoriser

$A(x)=(x+7)(6-x)$

$B(x)=(2-x)(x+1)$

$C(x)=x(1-3x)$

$D(x)=(x-2)(x+2)$

39 Lire des images

1. $f(0)=2$

2. L'image de 1 par f est 3.

40 Lire des antécédents

Les antécédents de 1 sont : -1 et $1{,}7$ et ceux de 2 sont $-0{,}5$; 0 ; $0{,}5$ et $1{,}5$.

41 Scratch

1. Il renvoie **L'image est strictement positive**.

2. **L'image est négative ou nulle**.

3. $f(x)=2x+4$.

Questions de cours

42 On repère les points d'intersection éventuels de la courbe avec l'axe des abscisses, et on repère sur quel intervalle la courbe est située au-dessus ou en dessous de l'axe des abscisses. Cela donne les 0 puis les intervalles où indiquer + et – dans la deuxième ligne du tableau.

43 Si $a>0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

Si $a<0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

44 Si l'inéquation est du premier degré, on peut la résoudre directement.
Sinon, il faut étudier le signe de $A(x)$ et lire les solutions dans le tableau de signes.

45 On étudie le signe de chaque terme du produit ou du quotient, puis on compile ces signes dans un unique tableau de signes. Enfin, on obtient le signe du produit ou du quotient avec la règle des signes.

46 On indique une valeur interdite par une double barre verticale dans le tableau de signes.

Lire le signe d'une fonction

47 **1.** $x \in \{-1; 2\}$

2. $x \in]-1; 2[$

3.

x	-2		-1		2		4
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

48 **a)**

x	-2		$-0{,}7$		$0{,}7$		2
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b)

x	-3		2
$g(x)$		$+$	

49 **a)**

x	-2		$-1{,}7$		1		4		5
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

b)

x	-3		-1		4
$g(x)$		$+$	0	$+$	0

50

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$-1{,}5$		2		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$0{,}5$		$1{,}25$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

51 **1.**

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2.

x	-2		$-1{,}5$		3
$g(x)$		$-$	0	$+$	

52

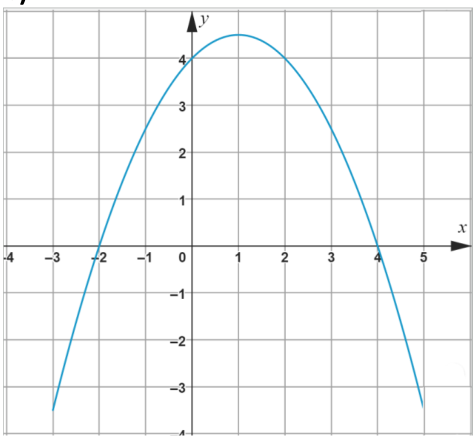
x	-4		-1		1
$f(x)$		$+$	0	$+$	

x	-7		3		9
$g(x)$		$-$	0	$+$	

53 **a)**

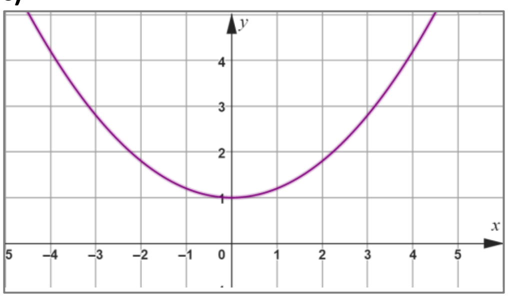
x	-2		-1		0		1		2
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

b)



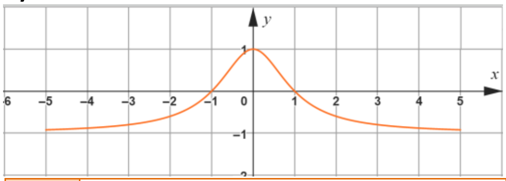
x	-3		-2		4		5
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c)



x	-5		5
$h(x)$		$+$	

d)



x	-5		-1		1		5
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

54 **1.**

x	-1		a		3
$f(x)$		$+$	0	$-$	

2. a) Elle renvoie `2.35`.

b) C'est une valeur approchée au dixième de a.

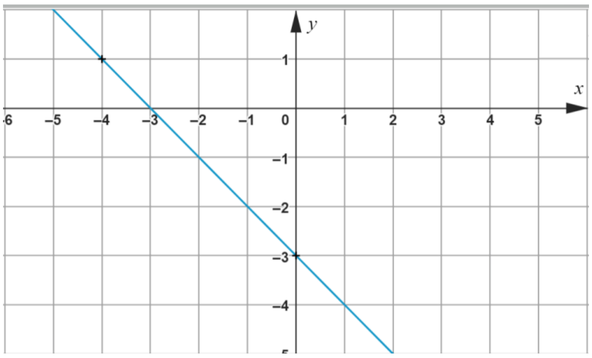
Interpréter le tableau de signes d'une fonction

55 **1.a)** $f(5)<0$

b) $f(-2)<0$

c) $f(-7)>0$

2.

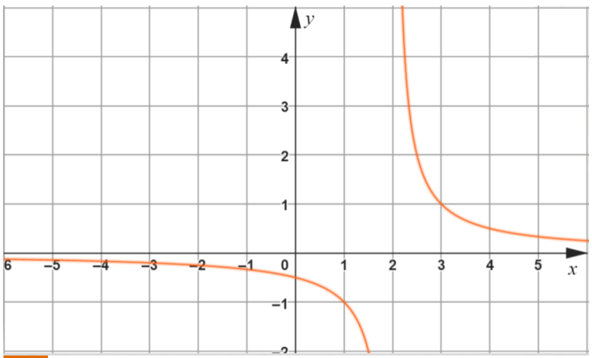


56 **1.a)** Strictement positif.

b) Strictement négatif.

c) Strictement négatif.

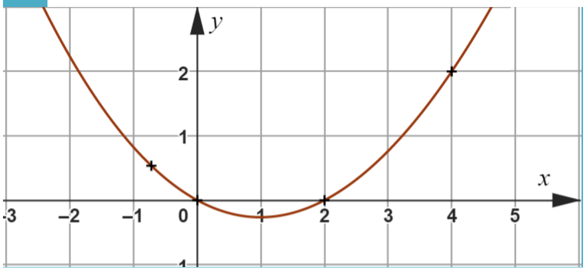
2.



57 **a)** $\mathcal{S}=\{-5;1\}$ **b)** $\mathcal{S}=]-5;1[$

c) $\mathcal{S}=]-\infty;-5]\cup[1;2]$ **d)** $x\in]-\infty;-5[\cup]1;2]$

58



59 **1. a)** $f(1)>0$

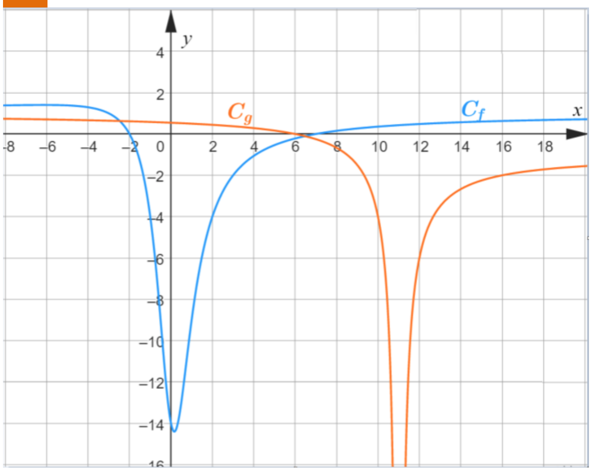
b) $g\left(\dfrac{5}{2}\right)<0$

c) $f(4)\times g(4)<0$

d) $\dfrac{g(0,5)}{f(0,5)}<0$

2. Oui.

60 **1.**



2. a) $x\in]-\infty;-2]\cup[7;+\infty[$

b) $x\in]6;11[\cup]11;+\infty[$

3. Sur $[-2;6]$, on a $g(x)\geqslant f(x)$ et sur $[7;11]$, on a $f(x)\geqslant g(x)$.

Déterminer le signe d'une fonction affine

61 **1. a)** $-7x+6=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{6}{7}$.

b) $a=-7<0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Comme $f\left(\dfrac{6}{7}\right)=0$, on trouve le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		$\dfrac{6}{7}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

2. a) $-7x+6>0 \Leftrightarrow x<\frac{6}{7}$.

b) On indique dans la première du tableau l'ensemble de définition et $\frac{6}{7}$ pour lequel $f(x)$ s'annule, puis on indique le 0 et le signe $+$ correspondant à l'ensemble solution du **2. a)** dans la seconde ligne, avant de compléter avec la dernière possibilité, le signe $-$.

3. $-\frac{b}{a}=-\frac{6}{-7}=\frac{6}{7}$ et $a<0$: on retrouve avec cela le tableau de signe du cours.

62 **1. a)** $2x-7=0 \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$.

b) $a=2>0$ donc g est croissante sur R.

Comme $g\left(\frac{7}{2}\right)=0$, on trouve le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. a) $2x-7>0 \Leftrightarrow x>\frac{7}{2}$.

b) On indique dans la première du tableau l'ensemble de définition et $\frac{7}{2}$ pour lequel $g(x)$ s'annule, puis on indique le 0 et le signe $+$ correspondant à l'ensemble solution du **2. a)**. dans la seconde ligne, avant de compléter avec la dernière possibilité, le signe $-$.

3. $-\frac{b}{a}=-\frac{-7}{2}=\frac{7}{2}$ et $a>0$: on retrouve avec cela le tableau de signe du cours.

63 **a)**

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		$\frac{5}{8}$		$+\infty$
$8x-5$		$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$-3x+12$		$+$	0	$-$	

d)

x	$-\infty$		$-\frac{2}{7}$		$+\infty$
$-7x-2$		$+$	0	$-$	

64 **a)**

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x+5$		$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$-x+4$		$+$	0	$-$	

c)

x	$-\infty$		$+\infty$
-2		$-$	

d)

x	$-\infty$		-8		$+\infty$
$\frac{1}{2}x+4$		$-$	0	$+$	

65 **a)**

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		$3{,}5$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		$2{,}5$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

d)

x	$-\infty$		-16		$+\infty$
$k(x)$		$+$	0	$-$	

66

a)

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

b)

x	$-\infty$		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

c)

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

d)

x	$-\infty$		$-\frac{72}{35}$		$+\infty$
$m(x)$		$-$	0	$+$	

67 a) $f(x)=\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$

b)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$m(x)$		$-$	0	$+$	

Déterminer le signe d'un produit

68 1.

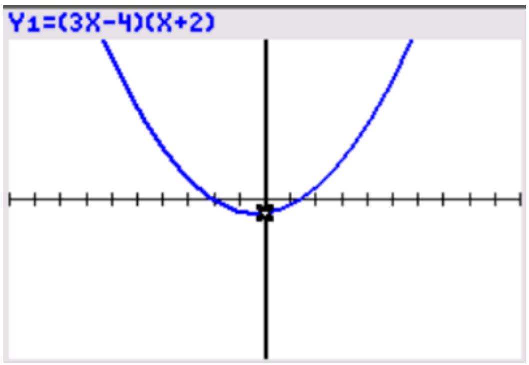
x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x-4$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	

2.

x	$-\infty$		-2		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. C'est bien le cas.



69 a)

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		-7		-4		$+\infty$
$u(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		13		$+\infty$
$v(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d)

x	$-\infty$		-24		$+\infty$
$w(x)$		$+$	0	$+$	

70 a)

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		$\frac{4}{7}$		8		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		-1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d)

x	$-\infty$		$-\frac{40}{19}$		-1		$+\infty$
$k(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

71 a)

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		-1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$h(x)$		+	0	−	0	+	

d)

x	$-\infty$		0		6		$+\infty$
$k(x)$		+	0	−	0	+	

72 **1.** $(2x+1)(x-3)$

$=2x^2-6x+x-3$

$=2x^2-5x-3=f(x)$.

2.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

73 **1.** $(-3x+6)(x+7)$

$=-3x^2-21x+6x+42$

$=3x^2-15x+42=f(x)$

2.

x	$-\infty$		-7		2		$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	0	−	

74 $A(x)=(x-5)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$A(x)$		+	0	−	0	+	

$B(x)=4x(-x+3)$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$B(x)$		−	0	+	0	−	

$C(x)=(x-3)(x+3)$.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$C(x)$		+	0	−	0	+	

$D(x)=(x-3)^2$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$D(x)$		+	0	+	

75 $A(x)=x(5-x)$.

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
$A(x)$		−	0	+	0	−	

$B(x)=-(2x-3)(2x+3)$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$B(x)$		−	0	+	0	−	

$C(x)=(x-0{,}5)^2$

x	$-\infty$		0,5		$+\infty$
$C(x)$		+	0	+	

$D(x)=(\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-x)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$D(x)$		−	0	+	0	−	

76 a)

x	$-\infty$		-11		-1		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

b)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{7}{6}$		$+\infty$
$g(x)$		+	0	−	0	+	

c)

x	$-\infty$		0		7		$+\infty$
$h(x)$		+	0	−	0	+	

d)

x	$-\infty$		1		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
$k(x)$		−	0	+	0	−	

77 a)

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

b)

x	$-\infty$		-5		0		6		$+\infty$
$g(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

c)

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$h(x)$		+	0	−	

d)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$k(x)$		−	0	+	0	+	

78 $f=u_1\times u_2$

$g=u_2\times u_6$

$h=u_1\times u_3$

Déterminer le signe d'un quotient

79 **1.** A(x) n'est pas définie pour $x=-3$.

x	$-\infty$			3		$+\infty$
$2x-6$			$-$	0	$+$	

2.

x	$-\infty$			-3		$+\infty$
$3x+9$			$-$	0	$+$	

3.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$A(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

La valeur interdite est -3.

80 **1.**

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	

2. a)

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$\dfrac{2x-1}{x-3}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

b)

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$\dfrac{2x-1}{3-x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

81 a)

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$\dfrac{8x-16}{x+4}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		-2		3,5		$+\infty$
$\dfrac{3x+6}{-2x+7}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

c)

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$\dfrac{x+1}{2-x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

d)

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{7}$		$+\infty$
$\dfrac{7x+1}{-4-4x}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

82

a)

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\dfrac{x}{-2x+1}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

b)

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$\dfrac{x+2}{3-x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

c)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\dfrac{-7x+14}{3x}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

d)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\dfrac{x}{6-3x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

83 a)

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$\dfrac{3x-5}{-2}$		$+$	0	$-$	

b)

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$\dfrac{2(3-x)}{x}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

c)

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$\dfrac{3x-1}{x^2}$		$-$	‖	$-$	0	$+$	

d)

x	$-\infty$		0		7		$+\infty$
$\dfrac{-5x}{2(x-7)}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

84 **1.** L'ensemble de définition est $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$.

2. $f(x)=\dfrac{7x-3}{x(x-1)}$.

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{7}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

85 **a)** $\mathrm{V}=\dfrac{3x}{(x+1)(x-2)}$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
V		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

b) $\mathrm{I}=\dfrac{2x+4}{2x-1}$

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
I		$+$	0	$-$	‖	$+$	

c) $\mathrm{T}=\dfrac{11x+20}{x(3x+5)}$

x	$-\infty$		$-\frac{20}{11}$		$-\frac{5}{3}$		0		$+\infty$
T		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

d) $\mathrm{E}=\dfrac{-4x+2}{(1-5x)(x+1)}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
E		$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	

86 **a)**

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		0		$+\infty$
$h(x)$		$-$	‖	$+$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		$\frac{6}{7}$		$+\infty$
$k(x)$		$+$	0	$-$	

c)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{9}$		1		$+\infty$
$m(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

d)

x	$-\infty$		$-\frac{8}{7}$		0		6		$+\infty$
$p(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Résoudre une inéquation à l'aide d'une étude de signe

87 **1.**

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$(x-2)(-2x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. $\mathcal{S}=\left]\frac{3}{2};2\right[$

88 **a)** $\mathcal{S}=\left]-\infty;\frac{1}{9}\right[\cup\left]4;+\infty\right[$

b) $\mathcal{S}=\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[2;+\infty\right[$

c) $\mathcal{S}=\left]-5;0,5\right[$

d) $\mathcal{S}=\left[-6;0\right]$

89 **a)** $\mathcal{S}=\left]0;3\right[$

b) $\mathcal{S}=\left]-\infty;0\right]\cup\left[2;+\infty\right[$

c) $\mathcal{S}=\left]-1;\frac{3}{4}\right[$

d) $\mathcal{S}=\left]-\infty;-2\right[\cup\left]6;+\infty\right[$

90 **a)** $\mathcal{S}=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{4};+\infty\right[$

b) $\mathcal{S}=\left]-\infty;-8\right[\cup\left[0;+\infty\right[$

c) $\mathcal{S}=\left[-1;2\right[$

d) $\mathcal{S}=\left]-\infty;-\frac{7}{3}\right[\cup\left]-\frac{8}{5};+\infty\right[$

91 **a)** $\mathcal{S}=\left]-\infty;-2\right[$

b) $\mathcal{S}=\left]-\infty;-\frac{3}{8}\right[\cup\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$

c) $\mathcal{S}=\left]-\frac{1}{2};0\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

92 **a)** $\mathcal{S}=\left[4;7\right[$

b) $\mathcal{S}=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\cup\left[-\frac{13}{10};+\infty\right[$

c) $\mathcal{S}=\left]0;\frac{7}{6}\right[\cup\left]\frac{7}{3};+\infty\right[$

93 **1.** $x^2<9 \Leftrightarrow x^2-9<0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)<0$

2.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$(x-3)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. $\mathcal{S}=]-3;3[$

94 **a)** $\mathcal{S}=]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$

b) $\mathcal{S}=\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$

c) $\mathcal{S}=\left]-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\cup\left]\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right[$

95 **1.** $\frac{1}{x}>2\Leftrightarrow\frac{1}{x}-2>0\Leftrightarrow\frac{1-2x}{x}>0$

2.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\frac{1-2x}{x}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

3. $\mathcal{S}=\left]0;\frac{1}{2}\right[$

96 **a)** $\mathcal{S}=]-\infty;0[\cup\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

b) $\mathcal{S}=]-\infty;-1]\cup]0;+\infty[$

c) $\mathcal{S}=\left]0;\frac{3}{2}\right]$

Utiliser les positions relatives des fonctions de référence

97 **a)** $5<5^2<5^3$

b) $0{,}1^3<0{,}1^2<0{,}1$

c) $\frac{8}{27}<\frac{4}{9}<\frac{2}{3}$

98 Les trois courbes se coupent aux points de coordonnée $(0;1)$ et $(1;3)$; sur $]0;1[$, $\mathcal{C}_3$ est située en dessous de $\mathcal{C}_1$ qui est elle-même située en dessous de $\mathcal{C}_2$.

99 **1. a)** $x^2-x=x(x-1)$

b)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c)Attention dans l'énoncé il faut lire $x^2\geqslant x$

$\mathcal{S}=[1;+\infty[$

2. $\mathcal{S}=[1;+\infty[$

3. Les trois courbes se coupent aux points de coordonnées $(0;0)$ et $(1;1)$.

Sur $]0;1[$, $\mathcal{C}_1$ est donc au-dessus de $\mathcal{C}_2$ qui est elle-même au-dessus de $\mathcal{C}_3$.

Sur $]1;+\infty[$, $\mathcal{C}_3$ est donc au-dessus de $\mathcal{C}_2$ qui est elle-même au-dessus de $\mathcal{C}_1$.

Comparaison d'expressions et positions relatives

100 **1.** Pour $f(x)=g(x)$, on a $\mathcal{S}=\{2\}$

Pour $f(x)<g(x)$, on a $\mathcal{S}=]-\infty;2[$

Pour $f(x)>g(x)$, on a $\mathcal{S}=]2;+\infty[$

2. Sur $]-\infty;2[$ $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.

Sur $]2;+\infty[$ $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se croisent au point de coordonnées $(2;5)$

101 **1.** $f(x)-g(x)=4x^2-4x+1$

2. $f(x)-g(x)=(2x-1)^2$

3. $f(x)-g(x)\geqslant 0$ donc $f(x)\geqslant g(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

4. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

102 Sur $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ $\mathcal{C}$ est au-dessus $\mathcal{C}'$.

Sur $]0;2[$ $\mathcal{C}$ est en-dessous de $\mathcal{C}'$.

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se croisent aux points de coordonnées $(0;4)$ et $(2;8)$

103 Sur $]-\infty;-1[\cup]0;1[$ $\mathcal{C}$ est au-dessus $\mathcal{C}'$.

Sur $]-1;0[\cup]1;+\infty[$ $\mathcal{C}$ est en-dessous de $\mathcal{C}'$.

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se croisent au point de coordonnées $(-1;-1)$ et $(1;1)$

Résoudre des problèmes

104 **Analyser un problème pour le résoudre**

1. a) $I=[0;4]$

2. $\mathcal{A}_{MEN}=\frac{ME\times NB}{2}$

$=\frac{(8-2x)\times(4-x)}{2}=\frac{32-8x-8x+2x^2}{2}$

$=\frac{32-16x+2x^2}{2}=16-8x+x^2$

3. $\mathcal{A}_{MEN} \geqslant 9 \Leftrightarrow 16-8x+x^2 \geqslant 9$

$(4-x)^2 \geqslant 9 \Leftrightarrow (4-x)^2-9 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (4-x+3)(4-x-3) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (7-x)(1-x) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (x-7)(x-1) \geqslant 0$

4. On résout l'inéquation en tenant compte de l'intervalle I. On obtient $\mathcal{S}=[0;1]$.

105 **1. a)** Le problème revient à résoudre $f(x)>3$.

$\Leftrightarrow -0{,}0075x^2+0{,}375x>3$

$\Leftrightarrow -0{,}0075x^2+0{,}375x-3>0$

2. $-0{,}0075(x-10)(x-40)$

$=-0{,}0075(x^2-10x-40x+400)$

$=-0{,}0075(x^2-50x+400)$

$=-0{,}0075x^2+0{,}375x-3$

3. $-0{,}0075x^2+0{,}375x-3>0$

$\Leftrightarrow -0{,}0075(x-10)(x-40)>0$

$\Leftrightarrow (x-10)(x-40)<0$

$\mathcal{S}=]10;40[$

106 **Rédiger une solution**

1. L'offre est supérieure à la demande si $f(x)>d(x)$

2. $f(x)>d(x)$

$\Leftrightarrow -\dfrac{500\,000}{x}+35\,000>-750x+45\,000$

$\Leftrightarrow -\dfrac{500\,000}{x}+35\,000+750x-45\,000>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-500\,000+35\,000x+750x^2-45\,000x}{x}>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{750x^2-10\,000x-500\,000}{x}>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x^2-40x-2\,000}{x}>0$

3. a) $(x+20)(3x-100)$

$=3x^2-100x+60x-2\,000$

$=3x^2-40x-2\,000$

b) $f(x)>d(x)$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x^2-40x-2\,000}{x}>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+20)(3x-100)}{x}>0$

c) $\mathcal{S}=\left[\dfrac{100}{3};50\right]$

107 $\mathcal{D}_f=\left[-\dfrac{7}{2};0\right]$

$\mathcal{D}_g=\mathbb{R}$

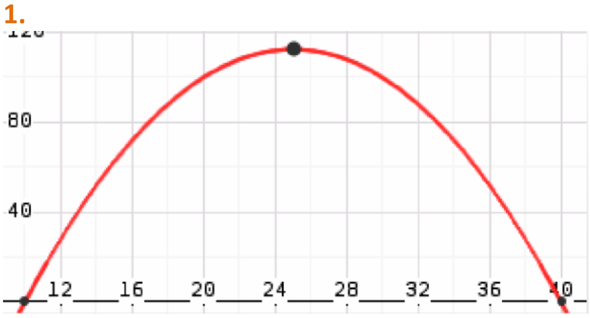
$\mathcal{D}_h=[-7;-1]$

$\mathcal{D}_k=]-\infty;-2[\cup\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

À chacun son rythme

108 **Énoncé A**

1.



2.

x	0		10		40		60
$B(x)$		−	0	+	0	−	

3. C'est le cas pour $x\in[10;40]$.

Énoncé B

1. $(5-0{,}5x)(x-40)$

$=5x-200-0{,}5x^2+20x$

$=-0{,}5x^2+25x-200=B(x)$

2. Avec une étude de signe, on trouve que $x\in[10;40]$.

Énoncé C

1. $-0{,}5(x-25)^2+112{,}5$

$=-0{,}5(x^2-50x+625)+112{,}5$

$=-0{,}5x^2+25x-312{,}5+112{,}5$

$=-0{,}5x^2+25x-200=B(x)$

2. $B(x)-112{,}5=-0{,}5(x-25)^2\leqslant 0$.

3. $B(25)=112{,}5$ donc avec la question précédente, le bénéfice maximal est de $112{,}5$ milliers d'euros.

Exercices de synthèse p. 282

109 Courbe et signe d'une fonction

1.

x	$-\infty$		$-6,5$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. a) $(x-1)(0,3x+2)$

$=0,3x^2+2x-0,3x-2$

$=0,3x^2+1,7x-2=f(x)$

b) En étudiant le signe de $(x-1)(0,3x+2)$, on retrouve le tableau de la question **1.**

110 Tableau de signes

1. $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)<0$ et $f\left(-\dfrac{7}{6}\right)>0$

2. Pour $f(x)>0$ on a $\mathcal{S}=]-2;-1[$ et pour $f(x)\leqslant 0$ on a $\mathcal{S}=[-5;-2]\cup[-1;5]$

3. $\sqrt{f}$ peut être définie si $f(x)\geqslant 0$, donc sur $[-2;-1]$.

111 Mise en forme et étude de deux fonctions

1. a) $f(x)=x(3x-4)$

b)

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) $\mathcal{S}=]-\infty;0]\cup\left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$.

2. a) $g(x)=\dfrac{4-3x}{x(4-x)}$.

b)

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		4		$+\infty$
$g(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	

c) $\mathcal{S}=]-\infty;0[\cup\left[\dfrac{4}{3};4\right[$.

112 Inéquations et études de signe

1. x ne peut pas être égal à -2.

2. L'inéquation est équivalente à $\dfrac{-3x-4}{x+2}\geqslant 0$

soit $A(x)=\dfrac{-3x-4}{x+2}$.

3. $\mathcal{S}=\left]-2;-\dfrac{4}{3}\right]$.

113 Deux tableaux sans courbe

x	-2		-1		3
$f(x)$		$+$	0	$-$	

114 Résolution graphique et par le calcul

1. a) $\mathcal{S}=\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right]\cup]3;+\infty[$

b) $\mathcal{S}=]0;3[\cup]4;+\infty[$

2.a) $f(x)\leqslant 1$ revient à $\dfrac{-2x+3}{x-3}\leqslant 0$ qui se résout en étudiant le signe du terme de gauche.

b) $f(x)>-x$ revient à $\dfrac{x^2-4x}{x-3}>0$ soit $\dfrac{x(x-4)}{x-3}>0$ qui se résout en étudiant le signe du terme de gauche.

115 Le potager d'Ekram

A ▶ Aménagement du potager

1. $\mathrm{MQ}=x-6$

2. a) L'aire vaut 300 donc $x\times\mathrm{AB}=300$ et $\mathrm{AB}=\dfrac{300}{x}$.

b) $\mathrm{MN}=\dfrac{300}{x}-6$.

3. $S(x)=(x-6)\left(\dfrac{300}{x}-6\right)$

$=300-6x-\dfrac{1\,800}{x}+36=336-6x-\dfrac{1\,800}{x}$.

B ▶ Conditions pour un grand potager

1. $S(x)>63$

$\Leftrightarrow 336-6x-\dfrac{1\,800}{x}-63>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-6x^2+273x-1\,800}{x}>0$

2. $-3(x-8)(2x-75)$

$=-3(2x^2-16x-75x+600)$

$=-3(2x^2-91x+600)$.

$=-6x^2+273x-1\,800$

3. Posons $P(x)=\dfrac{-6x^2+273x-1\,800}{x}$.

x	$-\infty$		0		8		$37{,}5$		$+\infty$
$P(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

4. D'après le tableau, les solutions de $P(x)>0$ sont les nombres de $[8;37{,}5]$.

Exercices d'approfondissement

p. 283

116 Troisième degré

Les solutions sont les nombres de $]0;1{,}5[\cup]1{,}5;+\infty[$.

117 Variations d'une fonction (1)

1. f semble décroissante sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$.

2. $f(b)-f(a)$

$$=\frac{2b+1}{(b-2)}-\frac{2a+1}{(a-2)}$$

$$=\frac{(2b+1)(a-2)-(2a+1)(b-2)}{(b-2)(a-2)}$$

$$=\frac{2ab-4b+a-2-(2ab-4a+b-2)}{(b-2)(a-2)}$$

$$=\frac{2ab-4b+a-2-2ab+4a-b+2}{(b-2)(a-2)}$$

$$=\frac{-4b+a+4a-b}{(b-2)(a-2)}=\frac{5a-5b}{(b-2)(a-2)}=\frac{5(a-b)}{(b-2)(a-2)}.$$

3. Si $2<a<b$ alors $b-2>0$ et $a-2>0$ et $a-b<0$ donc $f(b)-f(a)<0$.

4. On peut en déduire que f est décroissante sur $]2;+\infty[$.

118 Variations d'une fonction (2)

a) Si $5<a<b$, on a

$$f(b)-f(a)=\frac{-3(a-5)^2+3(b-5)^2}{(b-5)^2(a-5)^2}=\frac{3(b-a)(b+a-10)}{(b-5)^2(a-5)^2}$$

Or $5<a$ et $5<b$ donc $b+a-10>0$ et $a<b$ donc $b-a>0$ et $f(b)-f(a)>0$.

f est donc croissante sur $[5;+\infty[$.

b) Si $0<a<b$, on a

$$g(b)-g(a)=3(b-a)-\frac{2(a-b)}{ab}.$$

Or $a>0$ et $b>0$ donc $ab>0$.

De plus $a<b$ donc $b-a>0$ et $-2(a-b)>0$.

On en déduit que $g(b)-g(a)>0$ et que g est croissante sur $]0;+\infty[$.

119 Retrouver une fonction

1.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		$-$	‖	$+$	

2. $f(x)=x-3$

3. $g(x)=\dfrac{5-x}{x+1}$

120 Davantage de x

x	$-\infty$		-4		0		2		$+\infty$
$x\times f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

121 Retrouver une fonction

1.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$(x-2)^2$		$+$	0	$+$	

2. a) $(x-1)(x-2)^2$ convient.

b) $(3-x)(x-2)^2$ convient.

122 Positions relatives

1. $x^2-x=x(x-1)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Sur $]0;1[$, x est donc plus grand que x^2.

Sur $]1;+\infty[$ x est donc plus grand que x^2.

En 0 et 1, $x^2=x$.

2. $\left(x-\sqrt{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)=x^2-\sqrt{x}^2=x^2-x$ d'où le résultat.

3. a) On déduit de la question précédente que $x-\sqrt{x}$ est du même signe que x^2-x sur l'intervalle $]0;+\infty[$, donc :

Sur $]0;1[$, $\sqrt{x}$ est donc plus grand que x.

Sur $]1;+\infty[$ $\sqrt{x}$ est donc plus grand que x.

En 0 et 1, $\sqrt{x}=x$.

123 Positions relatives

1. a) La courbe $\mathcal{C}_f$ représentant f est celle en orange, ma courbe $\mathcal{C}_g$ représentant g est en rose.

b) Il semble que $\mathcal{C}_f$ soit toujours située au-dessus de $\mathcal{C}_g$, sauf au point d'abscisse 2 où les courbes se croisent.

2. a) $f(x)-g(x)$

$=1{,}5x^2-3x+4-(-0{,}5x^2+5x-4)$

$=1{,}5x^2-3x+4+0{,}5x^2-5x+4$

$=2x^2-8x+8.$

b) $f(x)-g(x)=2(x^2-4x+4)=2(x-2)^2$.

3. On déduit de la question précédente que $f(x)-g(x)>0$ sauf pour $x=2$ où $f(x)=g(x)$.

124 Convexité

A ▶1. a) $n(x)=3x-2$

b) $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$.

c) $x^2-n(x)=x^2-3x+2$. En étudiant le signe de $x^2-n(x)$ avec la question précédente, on trouve que si $x\in[1;2]$ alors $x^2\leqslant n(x)$ et $\mathcal{C}$ est située en-dessous du segment.

2. De même, la fonction affine est $r(x)=1$. Si $x\in[-1;1]$, on a $x^2\leqslant 1$ donc le segment $[\mathrm{AB}]$ est situé au-dessus de la courbe $\mathcal{C}$.

B ▶1. $\mathrm{A}(a;a^2)$ et $\mathrm{B}(b;b^2)$.

2. $a\leqslant x\leqslant b$

3. $f(x)=(a+b)x-ab$.

4. Il faut résoudre l'inéquation $x^2>(a+b)x-ab$.

5. $(x-a)(x-b)$

$=x^2-ax-bx+ab=x^2-(a+b)x+ab$.

6.

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
$x^2-f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

7. On déduit de la question précédente que $x^2\leqslant f(x)$ sur $[a;b]$ et donc que $\mathcal{C}$ est située en dessous du segment $[\mathrm{AB}]$.

C ▶1.a) Sur $]3;+\infty[$.

b) Sur $]-\infty;3[$.

2.a) $h(x)=\dfrac{3}{(b-3)(a-3)}x-\dfrac{ab}{(b-3)(a-3)}$.

Le coefficient directeur est positif car $a<3$ et $b<3$ donc $(a-3)<0$ et $(b-3)<0$ et

$\dfrac{3}{(b-3)(a-3)}>0$

b) L'ordonnée à l'origine est $-\dfrac{ab}{(b-3)(a-3)}$.

Son signe dépend du signe de a et de b.

3. $g(x)<\dfrac{3}{(b-3)(a-3)}x-\dfrac{ab}{(b-3)(a-3)}$.

4. $g(x)<\dfrac{3}{(b-3)(a-3)}x-\dfrac{ab}{(b-3)(a-3)}$

revient à :

$-\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{3}{(b-3)(a-3)}x+\dfrac{ab}{(b-3)(a-3)}<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-x(b-3)(a-3)-3x(x-3)+ab(x-3)}{(x-3)(b-3)(a-3)}<0$

Sur $]-\infty;3[$, $x-3<0$ donc en réduisant au même dénominateur, on retrouve bien la condition donnée.

5. En développant chaque terme, on trouve $3x^2-3(a+b)x+3ab$, d'où l'égalité entre chaque terme.

6. En étudiant le signe de l'expression, on trouve que $x\in]a;b[$ est bien solution de l'inéquation.

Cela montre bien que g est convexe sur $]-\infty;3[$

Vers la 1re

125 Vers la spécialité Maths

1. a)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2-2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) Elle est définie pour $x\in]-\infty;0]\cup[2;+\infty[$.

2. a)

X	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$X-X^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) $X\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$.

3. a) En posant $X=\sqrt{x^2-2}$, on trouve le résultat.

b) On doit avoir $\sqrt{x^2-2}>1$ ou $\sqrt{x^2-2}<0$, qui n'a pas de solution.

4. a) $\sqrt{x^2-2}>1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2}-1>0$. Or $\sqrt{x^2-2}+1>0$ donc l'inéquation est équivalente à celle donnée.

b) En développant le terme de gauche, on trouve $x^2-2x-1>0$.

5. a) Cela semble être le cas pour $x\in\left]-\infty;-0{,}4\right[\cup\left]1{,}4;+\infty\right[$.

b) On retrouve x^2-2x-1.

c) $x\in\left]-\infty;1-\sqrt{2}\right[\cup\left]1+\sqrt{2};+\infty\right[$.

d) Finalement, $x\in\left]-\infty;1-\sqrt{2}\right[\cup\left]1+\sqrt{2};+\infty\right[$.

126 Vers STMG

1. $x\in[0;20]$.

2. $C(5)=3\,780$.

3. a) La recette est de $5\times600=3\,000$ euros.

b) $R(x)=600x$.

4. a) Le bénéfice est de $R(5)-C(5)=-780$.

b) $B(x)=R(x)-C(x)=-30x^2+750x-3\,780$.

5. $30(x-7)(18-x)$

$=30(18x-x^2-126+7x)$

$=30(25x-x^2-126)$.

$=750-30x^2-3\,780=B(x)$

6. Avec l'expression de la fonction précédente et en étudiant le signe de l'expression, on trouve qu'un bénéfice est réalisé si la quantité fabriquée est comprise entre 7 et 18 tonnes.

Préparer le contrôle
Je me teste

p. 286

Objectif 1 Établir le tableau de signes d'une fonction

127 A et D

128 B et C

129 D

Objectif 2 Interpréter un tableau de signes

130 A

131 A et B

132 C

Objectif 3 Déterminer le signe d'une fonction affine, d'un produit ou d'un quotient

133 A et D

134 D

Objectif 4 Résoudre une inéquation

135 C

136 A

Préparer le contrôle
Je m'entraîne

p. 287

Objectif 1 Établir le tableau de signes d'une fonction

137 **1.** Pour $x\in[-2;-1[\cup]2;4]$

2.

x	-2		-1		2		4
$f(x)$		+	0	−	0	+	

138 **1.** $f(x)$ est strictement positive pour $x\in[-1;-0{,}6[\cup]1{,}5;2]$.

$f(x)$ est nulle en $-0{,}6$; $0{,}3$ et $1{,}5$.

$f(x)$ est strictement négative pour $x\in]-0{,}6;0{,}3[\cup]0{,}3;1{,}5[$.

2.

x	-1		$-0{,}6$		$0{,}3$		$1{,}5$		2
$f(x)$		+	0	−	0	−	0	+	

139

x	-3		-1		2		5		6
$f(x)$		−	||	−	0	+	0	−	

Objectif 2 Interpréter un tableau de signes

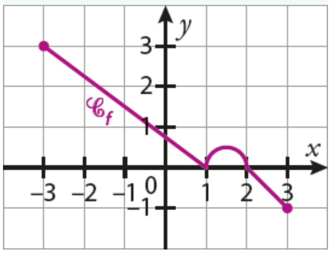
140 **1.** $f(-10)<0$, $f(1)<0$ et $f(5)>0$

2. $x=2$ est la seule solution.

141 **1.** $\mathcal{D}_f=]-\infty;5]$.

2. Ce sont ceux de $]-\infty;2[$.

142



Objectif 3 Déterminer le signe d'une fonction affine, d'un produit ou d'un quotient

143 1.

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		7		$+\infty$
$(-x+7)(5x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\frac{(-x+7)}{(5x+2)}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

144 $\frac{3}{x+5}-\frac{8}{2x+3}=\frac{-2x-31}{(x+5)(2x+3)}$

x	$-\infty$		$-\frac{31}{2}$		-5		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$\frac{3}{x+5}-\frac{8}{2x+3}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	

145 $A(x)=(-4x+2)(x-2)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$B(x)=(3-2x)(3+2x)$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Objectif 4 Résoudre une inéquation

146 1.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. $\mathcal{S}=]-4;2[$

147 a) $\mathcal{S}=\left]-\frac{1}{2};\frac{6}{5}\right[$

b) $\mathcal{S}=]-\infty;-1[\cup[2;+\infty[$

148 $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se croisent au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Pour les autres valeurs de x, $\mathcal{C}$ est située au-dessus de $\mathcal{C}'$.

Travaux pratiques p. 288-289

1 Optimisation de l'aire d'un triangle

- **Durée estimée :** 50 min
- **Objectif :** Conjecturer les solutions d'un problème en utilisant un logiciel de géométrie dynamique avant de le résoudre.

A. Conjecture

1. En utilisant les images du segment $[BD]$ par chacune de ces symétries, on montre que $N\in[CD]$ et $M'\in[AC]$.

3. Il semble que M doive être placé de telle sorte que $DM\in[1;5]$.

B. Résolution algébrique

1. $x\in[0;6]$.

2. $ND=x$ et $M'C=6-x$.

3. C'est un trapèze. Son aire est de

$\mathcal{A}'=6\times\frac{6-x+x}{2}=18$.

4. $\mathcal{A}=\mathcal{A}_{ABCD}-\mathcal{A}'-\mathcal{A}_{CNM'}-\mathcal{A}_{DMN}$

$=36-18-\frac{(6-x)^2}{2}-\frac{x^2}{2}=-x^2+6x$.

5. $\mathcal{A}(x)>5$ revient à $-x^2+6x-5>0$ et $-(x-1)(x-5)=-x^2+6x-5$ d'où le résultat.

6. En étudiant le signe de $-(x-1)(x-5)$, on trouve que les solutions sont les nombres x de $]1;5[$.

7. $\mathcal{A}(x)=-(x-3)^2+9$ donc l'aire est maximale lorsque M est le milieu de $[BD]$.

Elle vaut alors 9.

2 Signe d'une fonction polynôme du second degré

• **Durée estimée :** 20 minutes

• **Objectif :** Le but de ce TP est d'utiliser différents outils, tableur ou graphique, pour déterminer le signe d'une fonction avec des précisions données.

1. a)

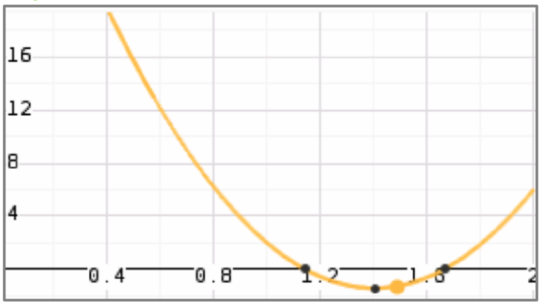
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	**x**	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
2	**21x^2-59x+40**	40	34,31	29,04	24,19	19,76	15,8	12,16	8,99	6,24	3,91	2	0,51	-0,56	-1,21	-1,44	-1,25	-0,64	0,39	1,84	3,71	6

b) Il semble qu'il y en ait deux.

c)

x	0		x_1		x_2		2
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2.a)



b) $x_1 \approx 1{,}143$ et $x_2 \approx 1{,}667$.

3.a) $(3x-5)(7x-8)$

$=21x^2-24x-35x+40$

$=21x^2-59x+40=f(x)$

b) $x_1=\dfrac{8}{7}$ et $x_2=\dfrac{5}{3}$.

3 Calculer un bénéfice

• **Durée estimée :** 40 minutes

• **Objectif :** Le but de ce TP est d'étudier un bénéfice selon différents points de vue, en utilisant différents outils numériques.

▶ A. Fonction test en langage Python

1. $R(x)=x\times N(x)=-x^2+140x$.

2. $B(x)=R(x)-2\,400=-x^2+140x-2\,400$.

3.

```
def benefice(x) :
      y=-x**2+140*x-2400
      return(y)
```

4.

```
def test(x) :
      if benefice(x)>=0 :
            print("Il réalise un bénéfice ")
      else :
            print("Il perd de l'argent" )
```

▶ B. Étude au tableur

1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	**x**	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	**N(x)**	140	139	138	137	136	135	134	133	132	131	130	129	128	127	126	125	124	123	122	121
3	**B(x)**	-2400	-2259	-2116	-1971	-1824	-1675	-1524	-1371	-1216	-1059	-900	-739	-576	-411	-244	-75	96	269	444	621
4	**x**	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

2. Il doit fixer son prix à 20 euros. Il en vendra alors 120.

▶ C. Étude algébrique

1. $-(x-20)(x-120)=-(x^2-120x-20x+2400)=-x^2+140x-2400=B(x)$.

2. En étudiant le signe de $B(x)$, on retrouve le résultat.

4 Signe d'une fonction affine

- **Durée estimée :** 20 minutes
- **Objectif :** Écrire un programme qui donne le signe d'une fonction affine.

1. `x` correspond à la solution de l'équation `f(x) = 0`.

2. a) -4 **b)** Un message d'erreur : on ne peut pas diviser par 0.

3. Le programme modifié et complété est le suivant.

```
def signe(a,b) :
      if a>0 :
            x=-b/a
            print("f est négative de - infini à ",x, " et positive de ",x, " à +infini ")
      elseif a==0 :
               if b>0 :
                  print(" Le signe est + ")
               elseif b==0 :
                  print(" Le signe est nul ")
               else:
                  print("Le signe est -")
      else:
           x=-b/a
           print("f est positive de - infini à",x, " et positive de ",x,"à +infini").
```

Chapitre 11 Proportions et évolutions

↪Manuel p.290-311

Commentaires pédagogiques

Ce chapitre se place dans la continuité du travail entamé au collège sur la proportionnalité et les évolutions en pourcentage. Il en reprend les méthodes de base via des exercices, avant d'introduire de nouveaux outils permettant la résolution de problèmes (évolutions successives, réciproques).

Proportion de proportion : cette partie engage le travail qui sera poursuivi en 1re (spécialité ou technologique) sur les arbres pondérés.

Évolutions d'une quantité : dans cette partie, nous introduirons la notion de coefficient multiplicateur, de variation absolue et de variation relative afin d'étudier et comparer des évolutions.

Évolutions successives et évolutions réciproques : l'utilisation des coefficients multiplicateurs prend ici tout son intérêt ; cette étude permet d'aller à l'encontre des idées reçues, comme pour l'addition de taux d'évolution.

Les capacités mises en jeu dans ce chapitre sont :

- Calculer des proportions de proportions.
- Utiliser le coefficient multiplicateur et calculer des variations absolues et relatives.
- Étudier des évolutions successives.
- Étudier des évolutions réciproques.

Corrigés des activités et des exercices

Pour prendre un bon départ p. 291

1 Calculer avec des fractions

a) $\frac{3}{10}=0,3$ **b)** $\frac{97}{100}=0,97$ **c)** $\frac{130}{100}=1,3$

d) $\frac{0,8}{5}=0,16$ **e)** $\frac{80}{3}$ **f)** $\frac{5}{24}$

2 Calculer avec des pourcentages

1. a) 0,2 **b)** 0,02 **c)** 0,75

2. a) 45% **b)** 60% **c)** 1,5%

3. 120

3 Déterminer des proportions à partir d' effectifs

1. $\frac{42}{60}=0,7$

2. $\frac{18}{60}=0,3=30\%$

4 Déterminer des effectifs à partir de proportions

1. $\frac{18}{100}\times 600=108$. Donc il y a 108 cadres dans l'entreprise.

2. $\frac{3}{4}\times 108=81$. Donc il y a 81 femmes cadres dans l'entreprise.

5 Calculer des évolutions données en pourcentage

1. $80+\frac{10}{100}\times 80=88$. Donc le nouveau prix des sneakers est $88€$.

2. $150-\frac{30}{100}\times 150=105$. Donc le nouveau prix du casque audio est $105€$.

6 Associer opérations et pourcentages

On peut faire les quatre regroupements suivants :

a) et **h)**

b), **d)** et **f)**

c) et **e)**

g) et **i)**

Activités

p. 292-293

1 Proportion de proportion

• **Durée estimée :** 20 min

• **Objectif** : Calculer une proportion de proportion dans un contexte d'ensembles emboités.

1. $p_1 = \frac{240}{400} = \frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$

2. $\frac{1}{10} \times 240 = 24$.

Donc 24 filles jouent au football.

3. a) $p_1' = \frac{1}{10}$ et $p_1'' = \frac{24}{400} = \frac{3}{50}$

b) $p_1 \times p_1' = \frac{3}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{50}$

Donc $p_1 \times p_1' = p_1''$.

4. a) $\frac{1}{4} \times 160 = 40$.

Donc 40 filles jouent au tennis.

b) $p_2 = \frac{160}{400} = \frac{2}{5}$, $p_2' = \frac{1}{4}$, $p_2'' = \frac{40}{400} = \frac{1}{10}$

Donc $p_2 \times p_2' = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = p_2''$.

5. $\frac{10}{100} \times 40 = 4$. Si le nombre de filles inscrites au tennis augmente de 10%, alors il y a 4 membres de plus. Donc le nombre total de membres a augmenté de 1%.

$\frac{20}{100} \times 40 = 8$. Si le nombre de filles inscrites au tennis augmente de 20%, alors il y a 8 membres de plus. Donc le nombre total de membres a augmenté de 2%.

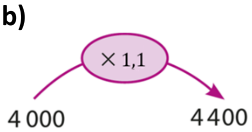
2 Évolution en pourcentage

• **Durée estimée : 20 min**

• **Objectif :** Introduire la notion de coefficient multiplicateur, de variation absolue et variation relative.

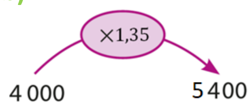
1. a) $4\,000 + \frac{10}{100} \times 4\,000 = 4\,400$

b)



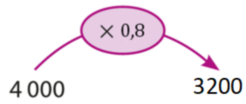
2. a) $4\,000 + \frac{35}{100} \times 4\,000 = 5\,400$

b)



3. a) $4\,000 - \frac{20}{100} \times 4\,000 = 3\,200$

b)



4. a) Le nombre d'abonnés a augmenté de 800 personnes.

b) $\frac{800}{4000} = 0{,}2$. Cela représente 20% du nombre d'abonnés de départ.

5. Si le nombre d'abonnés est divisé par 2, il a diminué de 50%.

S'il double, il a augmenté de 100%.

3 Évolutions successives

• **Durée estimée : 20 min**

• **Objectif :** Déterminer un taux d'évolution global associé à plusieurs évolutions successives.

1.a) $800 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 840$

Son prix sera $840€$.

b) $840 \times \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 873{,}6$

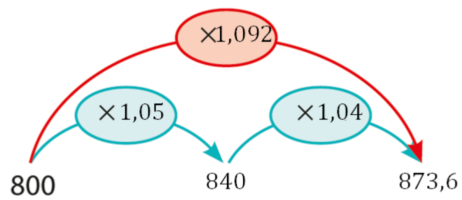
Son prix sera $873{,}60\,€$.

c) $\frac{873{,}6 - 800}{800} = 0{,}092$

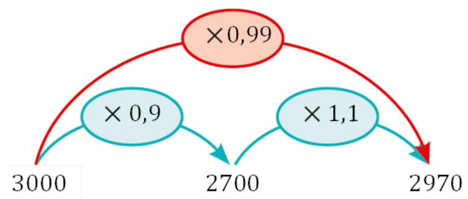
Donc le prix n'a pas augmenté de 9%.

Il a augmenté de $9{,}2\%$.

d)



2. a)



b) On ne retrouve pas le nombre de télévisions vendues de 2022.
Entre 2022 et 2024, le nombre de télévisions vendues a diminué de 1%.

3. $0{,}8\times0{,}9=0{,}72$. Des soldes à -20% avec -10% supplémentaires permettent d'obtenir une réduction de 28%.
$0{,}85\times0{,}85=0{,}7225$. Des soldes à -15% avec -15% supplémentaires permettent d'obtenir une réduction de $27{,}75\%$.
Il est donc plus intéressant d'acheter l'enceinte en soldes à -30%.

4 Évolution réciproque

- **Durée estimée : 20 min**
- **Objectif :** Déterminer un taux d'évolution réciproque

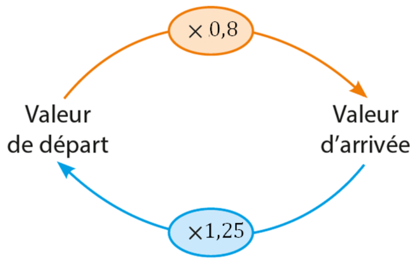
1. a) $1\,500\times\left(1-\dfrac{8}{100}\right)=1\,380$.

Il y a $1\,380$ élèves inscrits dans le conservatoire.

b) $\dfrac{1\,500-1\,380}{1\,380}\approx0{,}087$

Donc pour revenir à $1\,500$, le nombre d'élèves doit augmenter de $8{,}7\%$.

2. a)



b) $1{,}25-1=0{,}25$.
Donc le nombre d'élèves doit augmenter de 25% pour revenir à sa valeur initiale.

3. $C_{\text{global}}=\left(1+\dfrac{t}{100}\right)\times\left(1-\dfrac{t}{100}\right)=1-\left(\dfrac{t}{100}\right)^2$

$T_{\text{global}}=C_{\text{global}}-1=-\left(\dfrac{t}{100}\right)^2<0$

Donc on trouvera une valeur toujours plus petite.

Exercices résolus

À vous de jouer !

p. 295

1 $\dfrac{45}{100}\times\dfrac{1}{3}=0{,}15$.
Soit 15% de E dans le jeu.

2 $\dfrac{1}{10}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{40}=0{,}075$.
Soit $7{,}5\%$ de meubles en chêne dans le stock.

3 Variation absolue : $3\,920-3\,500=420$

Variation relative : $\dfrac{3\,920-3\,500}{3\,500}=0{,}12$

donc une hausse de 12%.

4 $\dfrac{182-219}{219}\approx-0{,}169$. Le prix du téléphone a diminué d'environ $16{,}9\%$.

5 $C_{\text{global}}=\left(1+\dfrac{15}{100}\right)\times\left(1-\dfrac{14}{100}\right)=0{,}989$

$T_{\text{global}}=0{,}989-1=-0{,}011$

donc une baisse de $1{,}1\%$.

6 $C_{\text{global}}=\left(1+\dfrac{10}{100}\right)\times\left(1-\dfrac{30}{100}\right)=0{,}77$

$T_{\text{global}}=0{,}77-1=-0{,}23$

donc une baisse de 23%.

7 $c_{\text{réciproque}}=\dfrac{1}{1{,}3}\approx0{,}769$

$t_{\text{réciproque}}=c_{\text{réciproque}}-1\approx-0{,}231$

donc une baisse d'environ $23{,}1\%$.

8 $c_{\text{réciproque}}=\dfrac{1}{1{,}1}\approx0{,}909$

$t_{\text{réciproque}}=c_{\text{réciproque}}-1\approx-0{,}091$

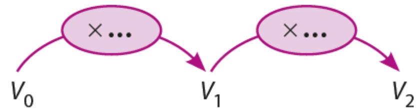
donc il doit subir une baisse d'environ $9{,}1\%$.

Exercices résolution de problèmes

p. 298

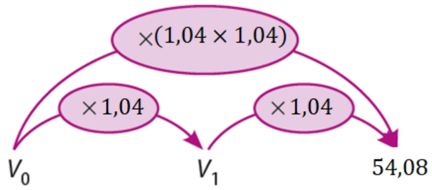
9 Évolution du prix d'un menu

Étape 1 : on a deux évolutions successives. On peut représenter la situation à l'aide du schéma suivant.



Où V_0 est le prix en 2021, V_1 le prix en 2022 et V_2 le prix en 2023.

Étape 2 : on complète le schéma avec les données de l'énoncé.



On peut rédiger la réponse de la façon suivante.

Une hausse de 4% revient à multiplier par

$1+\dfrac{4}{100}=1{,}04$.

Donc le coefficient multiplicateur global est $C_{\text{global}}=1{,}04\times1{,}04=1{,}0816$.

En notant V_0 le prix en 2021 et V_2 le prix en 2023, on a :

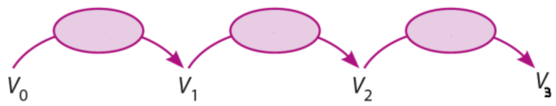
$$V_2=C_{\text{global}}\times V_0 \text{ donc } V_0=\frac{V_2}{C_{\text{global}}}$$

Donc $V_0=\dfrac{54{,}08}{1{,}0816}=50$

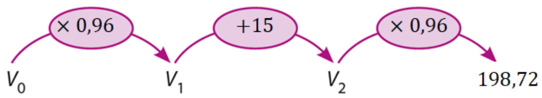
Le prix de la chambre en 2021 était $50€$.

10 Augmentation ou diminution ?

Étape 1 : On a trois évolutions successives. On peut représenter la situation à l'aide du schéma suivant.



Étape 2 : on complète le schéma avec les données de l'énoncé.



On peut rédiger la réponse de la façon suivante.

On note V_0 le prix initial, V_1 le prix après la première évolution, V_2 le prix après la deuxième évolution et V_3 le prix final.

$$V_3=V_2\times0{,}96 \text{ donc } V_2=\frac{V_3}{0{,}96}=\frac{198{,}72}{0{,}96}=207$$

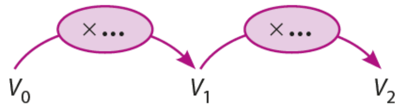
$$V_2=V_1+15 \text{ donc } V_1=V_2-15=192$$

$$V_1=V_0\times0{,}96 \text{ donc } V_0=\frac{V_1}{0{,}96}=200.$$

Le prix initial est $200€$ et le prix final est $198{,}72€$ donc le prix a diminué.

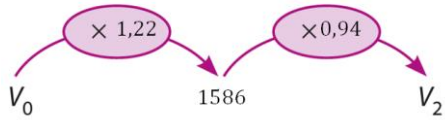
11 Évolution d'une production

Étape 1 : on a deux évolutions successives. On peut représenter la situation à l'aide du schéma suivant.



Où V_0 est le nombre de litres vendus en 2021, V_1 celui en 2022 et V_2 celui en 2023.

Étape 2 : on complète le schéma avec les données de l'énoncé.



On peut rédiger la réponse de la façon suivante.

On note V_0 le nombre de litres vendus en 2021, V_1 celui en 2022 et V_2 celui en 2023.

On a $V_1=1{,}22\times V_0$.

Donc $V_0=\dfrac{V_1}{1{,}22}=\dfrac{1\,586}{1{,}22}=1\,300$

On a $V_2=0{,}94\times V_1$.

Donc $V_2=0{,}94\times1\,586=1\,490{,}84$

Donc Diane a venu 1300 litres en 2021 et $1490{,}84$ litres en 2023.

Exercices automatismes

p. 299

Rituel 1

12 0,08

13 180

14 $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{23}{3}\right\}$

15 $\mathcal{S}=\{50\}$

16 $49,50€$.

17 $105\,000$ festivaliers.

Rituel 2

18 175

19 21 filles.

20 $\frac{476}{1\,458}\approx\frac{500}{1\,500}=\frac{1}{3}$

Donc les Secondes représentent environ 33% des élèves du lycée. Simon a tort.

21 $\frac{4}{20}=0,2$

22 $\frac{9}{10}=\frac{90}{100}=90\%$

Rituel 3

23 $\frac{8}{15}$

24 600

25 $0,8=80\%=\frac{80}{100}$

26 $60\%=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$

27 105 mètres.

28 200 € .

Rituel 4

29 100

30 Il y a 50 grammes de bonbons rouges dans le paquet.

31 $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

32 $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{8}\right\}$.

33 80 km/h.

34 6

Exercices d'entraînement

p. 300-303

Je consolide mes acquis

35 Proportions avec des effectifs (1)

$\frac{20}{85}\approx 0,235$. Donc la proportion des villes françaises dans lesquelles le groupe de jazz prévoit de faire un concert est $\frac{20}{85}$, soit environ $23,5\%$.

36 Proportions avec des effectifs (2)

La proportion de tirs réussis est

$\frac{21}{30}=0,7=70\%$.

37 Proportion et effectif de la population(1)

$\frac{8}{100}\times 1800=144$. Il y a 144 mangas.

38 Proportion et effectif de la population(2)

$\frac{23}{100}\times 800=184$.

184 personnes préfèrent le rap.

39 Proportion et effectif de la sous-population(1)

$\frac{12}{\frac{15}{100}}=80$.

L'agence de voyages propose 80 circuits au total.

40 Proportion et effectif de la sous-population(1)

$\frac{42,55}{\frac{6}{100}}\approx 709,17$.

Le budget est d'environ $709,17$ milliards.

41 Scratch

Le programme renvoie **48** .

Questions de cours

42 Le coefficient multiplicateur global est le produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution.

43 Le coefficient multiplicateur réciproque est l'inverse du coefficient multiplicateur de l'évolution de départ.

Proportion de proportion

44 $\frac{1}{2}\times\frac{20}{100}=0,1=10\%$

45 **1.** $\frac{1}{4}\times\frac{42}{100}=0,105$, soit $10,5\%$

2. $\frac{10,5}{100}\times 1\,600=168$.

168 élèves ont été admis.

46 **1.** $\frac{30}{100}\times\frac{40}{100}=0,12=12\%$

2. $\frac{54}{0,12}=450$.

Il y a 450 élèves en Seconde.

47 **1.** $\frac{15}{100}\times\frac{20}{100}=0,03=3\%$

2. $\frac{3}{100}\times 600=18$.

Donc 18 candidats sont retenus après la deuxième étape.

$\frac{3}{18}\approx 0,167$.

Donc les trois meilleurs candidats représentent environ $16,7\%$ des candidats de la troisième étape.

48 **Analyser un problème pour le résoudre**

$\frac{0,07}{0,35}=0,2=20\%$.

La proportion des séries françaises parmi les séries est 20%.

49 $\frac{0,139}{0,176}\approx 0,790$.

La proportion de femmes parmi les salariés à temps partiel est environ 79%.

Coefficient multiplicateur

50 **a)** 1,3 **b)** 0,9 **c)** 1,023 **d)** 2

51 **a)** 0,95 **b)** 1,0103 **c)** 4 **d)** 0,05

52 **a)** $+20\%$ **b)** -11% **c)** $+3\%$ **d)** $+100\%$

53 **a)** -70% **b)** $+0,87\%$ **c)** $+232\%$ **d)** $-12,4\%$

54 **1. a)** Il sera multiplié par $1+\frac{12}{100}=1,12$

b) $15\times 1,12=16,8$.

Son nouveau prix est $16,80$ €.

2. $40\times\left(1-\frac{5}{100}\right)=38$.

Son nouveau prix sera 38€.

55 **1.** $2\,500\times\left(1+\frac{2}{100}\right)=2\,550$

Roméo aura 2 550€ sur son compte en 2023.

2. **=B2*1,02**

56 **1.** Il renvoie `1.35`.

2. Ce programme renvoie le coefficient multiplicateur d'une évolution dont on a donné le taux en entrée.

3. Il faut rentrer `0.071`.

4.a) Il renvoie `-0.2`.

b)

```
t=float(input("t="))
if t<-1:
    print("erreur")
else :
    c=1+t
    print (c)
```

57 $\frac{135}{0,6}=225$.

Donc le prix avant réduction est 225 €.

58 **1.** $24\times\left(1+\frac{5,5}{100}\right)=25,32$.

Donc le prix TTC est 25,32€.

2. $\frac{31,20}{1,2}=26$.

Donc le prix HT est 26€.

59 $\frac{2{,}78}{1{,}09} \approx 2{,}55$.
Donc leur surface en 2020 était d'environ $2{,}55$ millions d'hectares.

60 Notons x le prix d'un article.
Si on veut un article, l'offre **c)** est la plus intéressante.
Si on veut deux articles, on paiera $1{,}5x$ avec l'offre **b)** et $2 \times 0{,}7x = 1{,}4x$ avec l'offre **c**.
Donc l'offre **c** est la plus intéressante.
Si on veut trois articles, on paiera $2x$ avec l'offre **a)**, $2{,}5x$ avec l'offre **b)** et $3 \times 0{,}7x = 2{,}1x$ avec l'offre **c)**, donc l'offre **a)** est plus intéressante.
On peut généraliser ce résultat : l'offre **a)** est la plus intéressante si on veut un nombre d'articles multiple de 3. Sinon l'offre **c)** est la plus intéressante.

Variation absolue, variation relative

61 **a)** Variation absolue : $15{,}5 - 20 = -4{,}5$
Variation relative : $\frac{15{,}5-20}{20} = -0{,}225$
donc une baisse de $22{,}5\%$.
b) Variation absolue :
$4\,250\,000 - 3\,550\,000 = 700\,000$
Variation relative :
$\frac{4\,250\,000 - 3\,550\,000}{3\,550\,000} \approx 0{,}197$
donc une hausse d'environ $19{,}7\%$.

62 **1.** Variation absolue : $2{,}15 - 1{,}67 = 0{,}48$.
Variation relative : $\frac{2{,}15-1{,}67}{1{,}67} \approx 0{,}287$
donc une hausse d'environ $28{,}7\%$.
2. $0{,}48 \times 30 = 14{,}4$.
Cela fera une différence de $14{,}40$ € sur un plein de 30 litres.

63 2h15= 135 min
$\frac{55-135}{135} \approx -0{,}5926$
Donc le temps d'écran de Sophie par jour a baissé d'environ $59{,}26\%$.

64

Gaz	Variation relative
Dioxyde d'azote	Volume constant. Variation relative nulle.
Oxygène	$\frac{17-21}{21} \approx -0{,}190$ donc une baisse d'environ 19%
Dioxyde de carbone	$\frac{4-0{,}03}{0{,}03} \approx 132{,}333$ donc une hausse d'environ $13\,233{,}3\%$

65 **1.** $\frac{216-303}{303} \approx -0{,}287$.
Sa consommation annuelle baissera d'environ $28{,}7\%$.
2. $(216-303) \times 0{,}19 = -16{,}53$.
Il réalisera $16{,}53$€ d'économie.

66 **1.**

	Variation absolue	Variation relative
MathsCoin	45 886	105,73
Pythareum	3 685,05	3879

2. Il était donc plus intéressant d'investir dans le Pythareum en 2016 car c'est cette cryptomonnaie qui a connu une variation relative la plus élevée.

67 **Esprit critique**
$\frac{3\,874}{17\,609} \approx 0{,}22$.
En 2002, le pourcentage d'abstention était d'environ 22%.
$\frac{3\,486}{12\,450} \approx 0{,}28$.
En 2022, le pourcentage d'abstention était d'environ 28%.
Jules a donc tort.
Le taux d'abstention a augmenté entre 2002 et 2022.
$\frac{28-22}{22} \approx 0{,}27$.
Il a augmenté d'environ 27%.

$\dfrac{3\,486-3\,874}{3\,874}\approx -0{,}10$. Le nombre d'abstention a bien diminué de 10% , mais pas le pourcentage d'abstention.
Le taux d'abstention s'obtient en calculant la proportion des citoyens s'étant abstenus (qui ne se sont pas déplacés pour voter) parmi l'ensemble des citoyens inscrits sur les listes électorales, à la date du scrutin.

Évolutions successives

68 **1.a)** $C_{\text{global}}=1{,}1\times 0{,}6=0{,}66$

b) $T_{\text{global}}=C_{\text{global}}-1=-0{,}34$.

2. a) $C_{\text{global}}=0{,}72$ et $T_{\text{global}}=-0{,}28$

b) $C_{\text{global}}=1{,}081\,41$ et $T_{\text{global}}=0{,}081\,41$

c) $C_{\text{global}}=0{,}9$ et $T_{\text{global}}=-0{,}1$

69 **a)** $C_{\text{global}}=1{,}12\times 0{,}95=1{,}064$

$T_{\text{global}}=C_{\text{global}}-1=0{,}064=6{,}4\%$

b) $C_{\text{global}}=0{,}5\times 0{,}4=0{,}2$

$T_{\text{global}}=-0{,}8=-80\%$.

c) $C_{\text{global}}=1{,}45\times 1{,}45=2{,}102\,5$

$T_{\text{global}}=1{,}102\,5=110{,}25\%$.

70 $C_{\text{global}}=0{,}7\times 0{,}9=0{,}63$

$T_{\text{global}}=C_{\text{global}}-1=-0{,}37$

Le prix d'une chemise a donc subi une réduction de 37% .

71 $C_{\text{global}}=0{,}94\times 1{,}04=0{,}977\,6$

$T_{\text{global}}=C_{\text{global}}-1=-0{,}022\,4$

Le volume d'eau a diminué de $2{,}24\%$ entre début aout et fin septembre.

72 $C_{\text{global}}=\left(1+\dfrac{t}{100}\right)\times\left(1+\dfrac{t}{100}\right)$

$=1+2\times\dfrac{t}{100}+\left(\dfrac{t}{100}\right)^2$

$T_{\text{global}}=C_{\text{global}}-1=\dfrac{2t}{100}+\left(\dfrac{t}{100}\right)^2$

Or $\left(\dfrac{t}{100}\right)^2\geqslant 0$ donc $T_{\text{global}}\geqslant\dfrac{2t}{100}$

Donc deux hausses successives de $t\%$ donnent toujours une hausse de plus de $2t\%$.

73 $C_{\text{global}}=1{,}04^3\approx 1{,}124\,9$

$T_{\text{global}}=C_{\text{global}}-1\approx 0{,}124\,9$

En trois ans, le prix du loyer a augmenté d'environ $12{,}49\%$.

$C_{\text{global}}=1{,}04^{15}\approx 1{,}800\,9$;

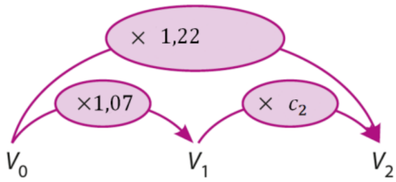
$T_{\text{global}}=C_{\text{global}}-1\approx 0{,}800\,9$

En quinze ans, le prix du loyer a augmenté d'environ $80{,}09\%$.

74 **a)** 15% **b)** $65{,}7\%$ **c)** 25%

75 **Choisir le bon schéma**

En notant V_0 la note d'Iris au 1er devoir, V_1 celle au 2e devoir et V_2 celle au 3e devoir, on peut représenter la situation par le schéma suivant :



Or $1{,}22=1{,}07\times c_2$. Donc $c_2=\dfrac{1{,}22}{1{,}07}\approx 1{,}140$

$t_2=c_2-1\approx 0{,}140$

Donc les notes d'Iris ont augmenté d'environ 14% entre le 2e et le 3e devoir.

76 $0{,}5\times 1{,}02^{29}\approx 0{,}888$

$0{,}5\times 1{,}02^{30}\approx 0{,}906$

Le taux de remplissage moyen du stade dépassera 90% au bout de 30 ans.

Évolution réciproque

77 **a)** $c_{\text{réciproque}}\approx 0{,}926$ et $t_{\text{réciproque}}\approx -7{,}4\%$

b) $c_{\text{réciproque}}\approx 1{,}163$ et $t_{\text{réciproque}}\approx 16{,}3\%$

78 $c_{\text{réciproque}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{18}{100}}\approx 1{,}219\,5$

$t_{\text{réciproque}}=c_{\text{réciproque}}-1\approx 0{,}219\,5$

Il faut qu'elle augmente d'environ $21{,}95\%$.

79 $c_{\text{réciproque}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{86}{100}}\approx 0{,}537\,6$

$t_{\text{réciproque}}=c_{\text{réciproque}}-1\approx -0{,}4624$

Elle diminue donc d'environ $46{,}24\%$.

80 $c_{réciproque} = \dfrac{1}{1-\dfrac{70}{100}} \approx 3{,}333$

$t_{réciproque} = c_{réciproque} - 1 \approx 2{,}333$

Il faut qu'il augmente d'environ $233{,}3\%$.

À chacun son rythme

81 Énoncé A

1. $\dfrac{1\,528 - 1\,254}{1\,254} \approx 0{,}219$

Donc le chiffre d'affaires a augmenté d'environ $21{,}9\%$

2. $1\,254 \times 1{,}097 \times 1{,}078 \approx 1\,483$

En 2018, le chiffre d'affaires est environ $1\,483$ milliers d'euros.

Énoncé B

$C_{global} = 1{,}097 \times 1{,}078 \times 1{,}051 \approx 1{,}243$

$T_{global} = C_{global} - 1 \approx 0{,}243$

Donc le chiffre d'affaires a augmenté d'environ $24{,}3\%$ entre 2016 et 2019.

Énoncé C

En 2021 le chiffres d'affaires était revenu au niveau de 2018. Donc le coefficient multiplicateur global entre 2018 et 2021 est égal à 1. Notons t le taux d'évolution entre 2020 et 2021.

On a $1{,}051 \times 0{,}969 \times (1+t) = 1$

Donc $t = \dfrac{1}{1{,}051 \times 0{,}969} - 1 \approx -0{,}018$

Donc le chiffre d'affaires a baissé d'environ $1{,}8\%$ entre 2020 et 2021.

L'énoncé A consiste en une application directe de la formule du taux d'évolution entre deux valeurs, puis un calcul de valeur finale connaissant le taux d'évolution.
Dans l'énoncé B, il faut comprendre quelles sont les valeurs à utiliser et calculer un taux d'évolution global de trois évolutions successives.
Enfin dans l'énoncé C, c'est à l'élève de trouver la démarche afin de déterminer la valeur demandée.

Exercices de synthèse

p. 304

82 Lycée et stage de troisième

1. $\dfrac{30}{100} \times \dfrac{8}{100} = 0{,}024$

Donc $2{,}4\%$ des élèves sont en Seconde et ont fait leur stage dans une pharmacie.

2. $\dfrac{\dfrac{1{,}8}{100}}{\dfrac{30}{100}} = 0{,}06$

Donc parmi les élèves de Seconde, 6% ont fait un stage dans un restaurant.

83 Dans tous les sens

1.

Valeur de départ	Valeur d'arrivée	Taux d'évolution en pourcentage	Coefficient multiplicateur
72	57,6	−20%	0,8
48	52,8	+10%	1,1
55	38,5	−30%	0,7
80	96	+20%	1,2
30	42	+40%	1,4
500	420	−16%	0,84

2. $C_{global} = 1{,}07 \times 0{,}64 = 0{,}684\,8$

$T_{global} = C_{global} - 1 = -0{,}315\,2$, soit une baisse de $31{,}52\%$.

3. $c_{réciproque} = \dfrac{1}{1{,}68} \approx 0{,}595$

$t_{réciproque} = c_{réciproque} - 1 \approx -0{,}405$ soit une baisse d'environ $40{,}5\%$.

84 Objectifs à atteindre

1. $C_{global} = 0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}81$

$T_{global} = C_{global} - 1 = -0{,}19$.

Cela correspond donc à une baisse de 19%.

Jeanne n'atteindra donc pas son objectif.

2.a) $C_{global} = 0{,}93 \times 1{,}02 \times 0{,}94 \approx 0{,}891\,7$

$T_{global} = C_{global} - 1 \approx -0{,}108\,3$ soit une baisse d'environ $10{,}83\%$.

b) Soit t l'évolution lors du dernier trimestre.

$0{,}93 \times 1{,}02 \times 0{,}94 \times (1+t) = 0{,}8$

Donc $t = \dfrac{0{,}8}{0{,}93 \times 1{,}02 \times 0{,}94} - 1 \approx -0{,}1028$

Donc le nombre de photocopies doit baisser d'environ $10{,}28\%$ lors du dernier trimestre.

85 Salaire et prêt

1. $\dfrac{630}{\dfrac{30}{100}}=2100$.

Le salaire mensuel de Maya est $2100€$.

2.a) $2100\times1{,}04=2184$

$2184\times1{,}04=2271{,}36$

Le salaire de Maya sera $2184€$ en 2024 et $2271{,}36€$ en 2025.

b) $C_{\text{global}}=1{,}04\times1{,}04=1{,}0816$;

$T_{\text{global}}=0{,}0816$.

Son salaire a augmenté de $8{,}16\%$.

c) $\dfrac{630}{2271{,}36}\approx0{,}277$.

La somme à rembourser représente $27{,}7\%$ de son salaire.

3. a) Il faut rentrer 2100.

b) **=B2*1,04**

86 Cuisine et devis

1.a) $6\,500\times1{,}1=7\,150$.

Le montant TTC est $7\,150€$.

b) $0{,}4\times7\,150=2\,860$.

Il doit payer un acompte de $2\,860€$.

c) Cela représente 30% du montant total.

d) $\dfrac{30}{100}\times7\,150=2\,145$

Il doit régler $2145€$.

2. a) $699\times\left(1-\dfrac{20}{100}\right)=559{,}2$

Le prix du réfrigérateur est $559{,}20\,€$.

b) $C_{\text{global}}=0{,}7\times0{,}9=0{,}63$

$T_{\text{global}}=-0{,}37$.

Il y a une réduction de 37%.

c) $\dfrac{63}{0{,}6}=105$.

Le prix avant soldes était $105\,€$.

87 Différences de salaires

a) Inès gagne $20{,}96\%$ de plus que Flora.

b) Pédro gagne $7{,}41\%$ de moins que Inès.

c) Flora gagne $10{,}71\%$ de moins que Pédro.

d) Flora gagne $17{,}33\%$ de moins que Inès.

Exercices d'approfondissement

p. 305

88 Aire et volume

1. $\left(1-\dfrac{25}{100}\right)\times\left(1-\dfrac{75}{100}\right)=0{,}1875$

$0{,}1875-1=-0{,}8125$

Son aire a diminué de $81{,}25\%$.

2. $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)\times\left(1+\dfrac{t}{100}\right)=1{,}96$

$\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^2=1{,}96$

$t=\left(\sqrt{1{,}96}-1\right)\times100=40$

Les côtés ont augmenté de 40%.

3. Le volume d'un cylindre est $\pi\times r^2\times h$.

$\left(1+\dfrac{20}{100}\right)\times\left(1+\dfrac{20}{100}\right)\times\left(1+\dfrac{30}{100}\right)=1{,}872$

$1{,}872-1=0{,}872$

Son volume a augmenté de $87{,}2\%$.

4. $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)\times\left(1-\dfrac{t}{100}\right)=1-\left(\dfrac{t}{100}\right)^2$

Le taux d'évolution est $-\left(\dfrac{t}{100}\right)^2$ % donc en pourcentage $-\left(\dfrac{t}{100}\right)^2\times100=-\dfrac{t^2}{100}$.

L'aire a donc diminué de $\dfrac{t^2}{100}$.

89 Fonction et évolution en pourcentage

1. a) $f(x)=1{,}02x$

b) f est une fonction linéaire.

2.a) d_2 **b)** d_4 **c)** d_1 **d)** d_3

3. Pour représenter une hausse, il faut que son coefficient directeur soit supérieur à 1. Pour représenter une baisse, il faut que son coefficient directeur soit inférieur à 1.

90 Bonnes affaires

Non, l'offre du premier magasin revient à un prix de $1{,}80$ euro par kilo alors que l'offre du deuxième magasin revient à un prix d'environ $1{,}82$ euro par kilo.

91 Réductions successives
Le prix de l'ordinateur a subi une baisse de 5% et une baisse de 8%.

92 Inflation
1. $\dfrac{157{,}6-150}{150}\approx 0{,}0507$

Donc $C_{\text{global}}\approx 1{,}0507$.

2. a) $c\times c=C_{\text{global}}$. Donc $c^2=1{,}0507$.

b) $c=\sqrt{1{,}0507}\approx 1{,}0250$

Donc $t=0{,}0250$. Le taux d'évolution annuel moyen est $2{,}5\%$.

c) Samantha a raison, c'est plus que l'inflation annuelle de 2%.

93 Rédiger une solution
1. $C_{\text{global}}=0{,}9\times 0{,}9\times 0{,}9=0{,}729$

Donc $T_{\text{global}}=-0{,}271$.

Cela correspond à une baisse de $27{,}1\%$, donc ce ne sera pas suffisant.

2. $C_{\text{global}}=(1+t)\times(1+t)\times(1+t)$

Et le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 30% est $1-\dfrac{30}{100}=0{,}7$.

Donc le problème revient à résoudre $(1+t)^3=0{,}7$

3. a) $X^3=0{,}7\Leftrightarrow X=\sqrt[3]{0{,}7}\approx 0{,}888$

b) $t=X-1\approx -0{,}112$

Il faut donc une baisse mensuelle d'environ $11{,}2\%$.

94 Fréquentation d'un cinéma
1. La recette est égale au nombre de tickets vendus multiplié par le prix d'un ticket.

$\left(1+\dfrac{10}{100}\right)\times(1+t)=1{,}045$

Donc $t=\dfrac{1{,}045}{1{,}1}-1=-0{,}05$

Le nombre de tickets vendus a baissé de 5%.

2. On cherche à maximiser $\left(1+\dfrac{x}{100}\right)\times\left(1-\dfrac{0{,}5x}{100}\right)$

Il faut que x soit égal à 50.

95 Modéliser à l'aide d'une indéterminée
Soit x le pourcentage de tablettes ayant un défaut parmi celles de l'usine B.

$\dfrac{60}{100}\times\dfrac{4}{100}+\dfrac{40}{100}\times x=\dfrac{5}{100}$

Donc $0{,}024+0{,}4\times x=0{,}05$

$x=\dfrac{0{,}05-0{,}024}{0{,}4}=0{,}065$

Donc $6{,}5\%$ des tablettes de l'usine B ont un défaut.

96 Différentes réductions
Soit x le prix de la coque non soldée et y le prix des écouteurs non soldés.

$\begin{cases}0{,}8\times x+0{,}7\times y=80\\0{,}7\times x+0{,}8\times y=85\end{cases}$ donc $\begin{cases}x=30\\y=80\end{cases}$

Le prix de la coque non soldée est $30€$, le prix des écouteurs non soldés est $80€$.

Vers la 1re
97 Vers STMG
1.

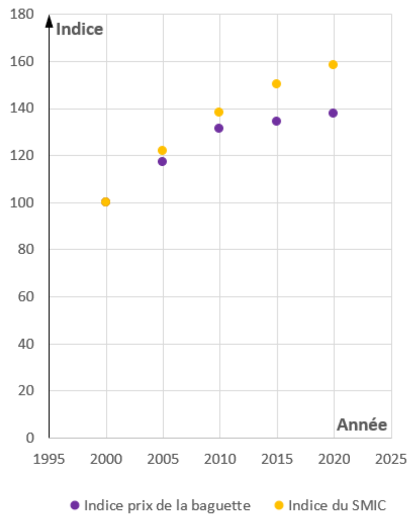
	2000	2005	2010	2015	2020
Prix de la baguette (en euros)	0,64	0,75	0,84	0,86	0,88
Indice	100	117,19	131,25	134,38	137,5

	2000	2005	2010	2015	2020
SMIC	6,41	7,82	8,86	9,61	10,15
Indice	100	122,00	138,22	149,92	158,35

2. $\dfrac{143{,}75\times 0{,}64}{100}=0{,}92$.

Donc le prix d'une baguette de pain est $0{,}92€$

3. La hausse du SMIC est plus importante que la hausse du prix de la baguette.



98 **Vers la spécialité Maths**

1. $12\,500\times1{,}05=13\,125$

Il y a aura 13 125 habitants en 2023.

2. a) $u(0)=12\,500$ et $u(1)=13\,125$.

b) $u(2)=13\,125\times1{,}05\approx13\,781$

Il y aura environ $13\,781$ habitants en 2024.

c) $u(3)=13\,781\times1{,}05\approx14\,470$

Il y aura environ $14\,470$ habitants en 2025.

d) $u(n)=12\,500\times1{,}05^n$

3. En 2031, $u(9)=12\,500\times1{,}05^9\approx19\,391$

En 2032, $u(10)=12\,500\times1{,}05^{10}\approx20\,361$

Le nombre d'habitants dépassera $20\,000$ en 2032.

4. a) Ce programme affiche **15**.

b) 2022+15=2037. En 2037, le nombre d'habitants dépassera 25000.

Préparer le contrôle
Je me teste p. 308

Objectif 1 Calculer des proportions

99 C

100 A

Objectif 2 Calculer des variations absolues et relatives

101 C

102 B

103 B

104 B et D

Objectif 3 Étudier des évolutions successives

105 A

106 B

Objectif 4 Étudier des évolutions réciproques

107 B et C

108 A

Préparer le contrôle
Je m'entraîne p. 309

Objectif 1 Calculer des proportions

109 $0{,}22\times0{,}55=0{,}121$ donc $12{,}1\%$.

110 $\dfrac{15}{0{,}6\times0{,}1}=250$.

111 $\dfrac{0{,}08}{\frac{1}{4}}=0{,}32$.

Objectif 2 Calculer des variations absolues et relatives

112 **1.** $430\times1{,}15=494{,}5$

2. $\dfrac{500-430}{430}\approx0{,}163$

113 la plus grande évolution est entre 2019 et 2020.

	2019/2020	**2020/2021**
Variation absolue	$+0{,}12$	$+0{,}1$
Variation relative	$+1{,}20\%$	$+0{,}99\%$

114 Achats sans soldes : $15+\dfrac{28}{0{,}7}=55$

Achats avec soldes : $15\times0{,}8+28=40$

Remise : $\dfrac{40-55}{55}\approx-0{,}2727$ donc une baisse d'environ $27{,}27\%$.

Objectif 3 Étudier des évolutions successives

115 $C_{\text{global}} = 1{,}08 \times 0{,}74 = 0{,}7992$

$T_{\text{global}} = -0{,}2008$ donc baisse de $20{,}08\%$.

116 $\dfrac{2\,277}{0{,}88 \times \dfrac{3}{4}} = 3\,450$

117 $\dfrac{0{,}56}{0{,}8} = 0{,}7$ donc une première baisse de 30%.

Objectif 4 Étudier des évolutions réciproques

118 $c_{\text{réciproque}} = \dfrac{1}{1{,}54} \approx 0{,}649$

$t_{réciproque} \approx -0{,}351$, donc baisse d'environ $35{,}1\%$.

119 $\dfrac{1\,200 - 1\,100}{1\,100} \approx 0{,}0909$, donc augmentation d'environ $9{,}09\%$.

120 • $c_{\text{réciproque}} = \dfrac{1}{3 \times 0{,}15} \approx 2{,}222$;

$t_{\text{réciproque}} \approx 1{,}222$, donc il faut qu'elle augmente d'environ $122{,}2\%$.

Travaux pratiques

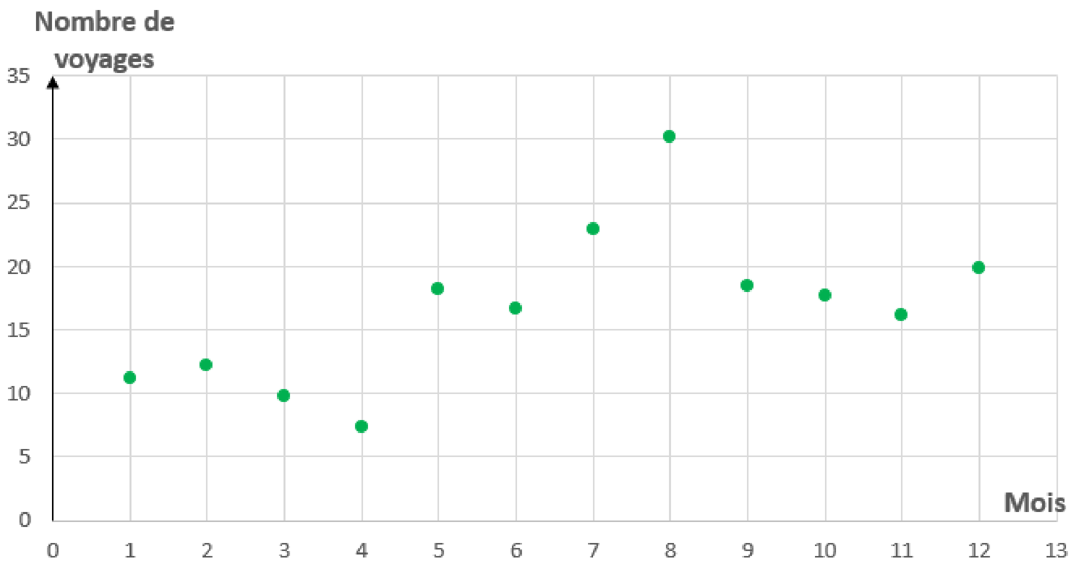
p. 310-311

1 Évolution du nombre de voyages

• **Durée estimée :** 30 min

• **Objectif :** Étudier l'évolution d'une série de données à l'aide d'un tableur.

2.



3. a) **=C2-B2**

4. Il faut rentrer la formule =(C2-B2)/B2 dans la cellule C4

5. La plus forte baisse a eu lieu entre août et septembre. La plus forte hausse a eu lieu en avril et mai.

6. a) $19{,}9 \times 0{,}7 = 13{,}93$. On peut prévoir 13,93 millions de voyages en janvier 2022.

b) $\dfrac{11{,}2}{0{,}7} = 16$. Il y aurait eu 16 millions de voyages en décembre 2020.

2 Algorithme et évolution

• **Durée estimée :** 30 min

• **Objectif :** Utiliser des programmes en python pour déterminer des taux d'évolution et des taux d'évolution réciproque.

▶ A. Variation relative

1. Il faut corriger la troisième ligne :
`t=(VA-VD)/VD`

2. a) Le programme affiche `0.375`.

b) Le programme affiche `-0.13333...`

3.

```
VD=float(input("VD="))
VA=float(input("VA="))
t=(VA-VD)/VD
if t>0:
    print("hausse")
else :
    print("baisse")
print(t)
```

▶ B. Taux d'évolution réciproque

1. La fonction ④.

2. a) `-0.1666…` b) `0.25` c) `-0.6666` d) `-2`

3.

```
def f(t)
   if t<-1:
    print("erreur")
else :
     cr=1/(1+t)
     tr=cr-1
   return tr
```

4. La valeur de `t` était `0.6`.

3 Les soldes

• **Durée estimée :** 45 min

• **Objectif :** Utiliser un tableur pour calculer des prix après démarques lors de soldes

▶ A. Première démarque

2. Il faut rentrer
=ARRONDI(A2*(1-$F$2/100);2)

3. a) Après une 1ère démarque à -30% le prix sera $21€$.
Après une 1ère démarque à -60% le prix sera $12€$.

b) Le prix avant les soldes était $65€$.

▶ B. Deuxième et troisième démarques

1. a) Il faut rentrer
= ARRONDI(B2*(1-$G$2/100) ;2)

b) Il faut rentrer
=ARRONDI(C2*(1-$H$2/100);2)

2. a) Son prix sera $15,12€$.

b) Son prix était $137€$.

3. Pour la question ▶ **A. 3.a)** $30\times\left(1-\frac{30}{100}\right)=21$

$30\times\left(1-\frac{60}{100}\right)=12$

Pour la question ▶ **A. 3.b)** $\frac{52}{0{,}8}=65$

Pour la question ▶ **B. 2.a)** $30\times0{,}7\times0{,}8\times0{,}9=15{,}12$

Pour la question ▶ **B. 2.b)** $0{,}9^3\times x<100 \Leftrightarrow x<\frac{100}{0{,}9^3}$

Donc la plus grande valeur de x possible est 137.

4 Compte épargne

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Utiliser un programme python avec une boucle for pour calculer la somme sur un compte épargne avec des intérêts à taux composé.

1. a)

```
s=500
for i in range(1,4):
      s=1.02*s
print(s)
```

b) Kenny aura 530,60€ sur son compte en 2025.

2. Il faut remplacer la deuxième ligne par
for i in range(1,21)
Kenny aura 742,97€ sur son compte en 2042.

3.

```
s=500
n=2022
while s<1000 :
      s=1.02*s
      n=n+1
print(n)
```

La somme aura doublé en 2058.

Chapitre 12 Statistiques descriptives

↪Manuel p.312-339

Commentaires pédagogiques

Ce chapitre portant sur les statistiques reprend les notions vues au collège (moyenne, médiane, fréquence ainsi que les représentations graphiques des séries statistiques) pour les enrichir et les compléter.
La notion de moyenne est d'abord réactivée puis enrichie de celle de moyenne pondérée, en lien avec des exemples pratiques (calcul de notes pondérés, évolution en pourcentage, etc.), suivie de la propriété de linéarité de la moyenne.
Le concept de dispersion d'une série statistique est ensuite introduit à travers de nouveaux indicateurs, l'écart-type puis l'écart interquartile (donc les quartiles), auxquels nous avons donné du sens (pour ce faire, la notion de médiane est réactivée) via de nombreux exercices concrets et variés.
La comparaison de séries est alors l'occasion d'utiliser de façon pertinente toutes ces notions ainsi, bien sûr, que différents types de représentations graphiques.
Les TICE ont par ailleurs une large place dans ce chapitre notamment via le tableur en activités et en TP mais également par l'utilisation de la calculatrice et de la programmation (programme calculant la moyenne et l'écart-type notamment), conformément au programme.
Les capacités mises en jeu dans ce chapitre sont :

- Comprendre et déterminer les différents indicateurs au programme.
- Interpréter concrètement une situation en mobilisant des indicateurs ou des représentations graphiques **pertinents**.

Corrigés des activités et des exercices

Pour prendre un bon départ p. 313

1 Moyenne et médiane

1. $\dfrac{12,54+31,79+21,37+19,99+51,12+36,10+9,15}{7}$

≈ 26 euros.

2. a) Les sept valeurs classées par ordre croissant sont
$9,15-12,54-19,99-21,37-31,79-36,10-51,12$

b) L'étendue est $51,12-9,15=41,97$.

c) La médiane est la valeur centrale : $21,37$.

2 Avec des effectifs

1. Il y a 3 jours durant lesquels elle a reçu 2 appels.
Il y a $2+1+3=6$ jours durant lesquels elle a reçu deux appels ou moins.

2. Il y a 2 jours durant lesquels elle a reçu 3 appels.

3. La fréquence de la valeur 0 est $\dfrac{2}{8}=0,25$. Il y a eu $25\ \%$ des jours durant lesquels elle n'a pas reçu d'appel.

4. L'étendue est $3-0=3$.
La moyenne est :
$\dfrac{0+0+1+2+2+2+3+3}{8}=\dfrac{13}{8}\approx 1,625$.

La série ordonnée est :
$0-0-1-\underbrace{2-2}_{\text{valeurs centrales}}-2-3-3$

donc la médiane est $\dfrac{2+2}{2}=2$.

3 Représentations graphiques

1. a) Bleuet, rose, pivoine et tulipe.

b) Il y a $24\times\dfrac{1}{2}=12$ tulipes, $24\times\dfrac{1}{8}=3$ bleuets, $24\times\dfrac{1}{8}=3$ roses et $24\times\dfrac{1}{4}=6$ pivoines.

2. Remarque : l'histogramme ne permet pas de savoir si les intervalles sont ouverts en leur borne de gauche ou leur borne de droite.

On fait le choix traditionnel de les ouvrir en leur borne de droite.

Classe	[40 ;55[	[55 ;70[	[70 ;80[	[80 ;120[
Effectif	12	24	28	16

Activités

p. 318-319

1 Moyenne pondérée

• **Durée estimée :** 20 min

• **Objectif** : Introduire la notion de moyenne pondérée dans un contexte connu des élèves (les notes coefficientées) afin de dégager la formule du cours.

1. a) Obtenir 17 coefficient 2 compte comme 34 sur 40.

b) Obtenir 5 coefficient $0{,}5$ compte comme $0{,}5\times5=2{,}5$ sur $0{,}5\times20=10$.

Obtenir 4 coefficient $0{,}25$ compte comme $0{,}25\times4=1$ sur $0{,}25\times20=5$.

c) $34+15+14+2{,}5+1=66{,}5$ sur $40+20+20+10+5=95$.

d) On a :

$66{,}5\to95$

$?\to20$

On calcule $\frac{20\times66{,}5}{95}=14$ donc Joshua a 14 sur 20 de moyenne.

$\frac{66{,}5}{14}=4{,}75$ donc on a divisé la moyenne sur 95 par 4,75 c'est-à-dire par $2+1+1+0{,}5+0{,}25$, la somme des coefficients des notes.

2. Les meilleurs notes sont les notes avec un coefficient plus élevé : elles comptent donc davantage.

3. $\frac{3\times12+2\times9+2\times16+0{,}75\times13}{3+2+2+0{,}75}\approx12{,}4$.

4.

```
n=int(input("Nb. de notes ? "))
tot_note=0
tot_c=0
for i in range(0,n):
      note=float(input("Note ? "))
      c=float(input("Coeff. ? "))
      tot_note=tot_note+c*note
      tot_c=tot_c+c
print("Moyenne : ",tot_note/tot_c)
```

2 Linéarité de la moyenne

• **Durée estimée :** 30 min

• **Objectif :** Introduire la linéarité de la moyenne grâce au tableur.

Le concept d'adressage absolu à l'aide des dollars est rappelé.

3. b) Non, la référence à la cellule H1 devient H2, H3, etc. en recopiant vers le bas or on souhaite que cela reste H1.

c) **=A2*H$1**

5. La moyenne des valeurs de la colonne A.

6. Ce sera la valeur obtenue en A22 multipliée par 2 .

7. La moyenne des valeurs de la colonne C est A22+2 .

La moyenne des valeurs de la colonne D est A22/2 .

La moyenne des valeurs de la colonne E est $A22-2$.

8. b) Quand on multiplie (respectivement divise) toutes les valeurs d'une série par un même nombre k, la moyenne de la nouvelle série est obtenue en multipliant (respectivement divisant) la moyenne de la série de départ par k.

Quand on ajoute (respectivement soustrait) un même nombre k à toutes les valeurs d'une série, la moyenne de la nouvelle série est obtenue en ajoutant (respectivement soustrayant) k à la moyenne de la série de départ.

3 Écart-type

• **Durée estimée :** 20 min

• **Objectif :** Introduire et donner du sens à la notion d'écart-type en utilisant le tableur.

2. a) Leurs moyennes de buts sont relativement similaires : 20,75 –21 –21,75 .

b) Dépend de l'élève.

c) On obtient :

• en B7 : 4,4

• en C7 : 2,5

• en D7 : 7,5 (arrondie à 0,1 près).

d) Cela montre que Tranborg est la plus régulière, suivie de Bölk puis Van der Heijden.

3. a) *A priori*, Hagman semble la moins régulière donc la série lui correspondant aura probablement le plus grand écart-type.

b) Cela est confirmé par le tableur (écart-type d'environ 12 contre moins de 6).

4. Selon le nombre de matchs joués, le nombre de buts peut grandement différer lors d'une compétition (par exemple si une équipe est qualifiée ou non pour les phases finales). Il serait intéressant de regarder les nombres de buts par matchs pour affiner l'analyse.

4 Quartiles d'une série statistiques

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Découvrir les quartiles avec le tableur.

2. a) Ce sont les Fidji, ligne 51.
Comme il y a une ligne d'en-tête, il y a 50 pays sur 199 ayant une espérance de vie inférieure ou égale à $65{,}767$ ans. $\dfrac{50}{199} \approx 0{,}251$ soit environ $25\ \%$ des pays.

b) C'est Antigua-et-Barbuda, ligne 151.
$\dfrac{150}{199} \approx 0{,}754$ soit environ $75\ \%$ des pays.

c) Voir cours.

3. b) • Il y a le même nombre de pays que dans la question **2.** donc, pour Q'_1, quand on cherche l'espérance de vie telle que dans au moins $25\ \%$ des pays les femmes aient cette espérance de vie ou moins, on retombe sur le 50^{e} pays à la ligne 51 : $70{,}061$ ans (pour la république démocratique populaire Lao aussi appelée Laos).

• De même pour Q'_3, on retombe sur le 150^{e} pays à la ligne 151 : $80{,}9$ ans (pour la Croatie).

• $199 = 99 + 1 + 99$ donc la médiane est la 100^{e} valeur que l'on trouve à la 101^{e} ligne : $77{,}2$ ans (pour la Serbie).

c) On peut s'attendre à environ $25\ \%$ dans les deux cas.

d) • Pour $[Q_1 ; \text{méd}]$, il y a $101 - 50 = 51$ pays dedans soit $\dfrac{51}{199} \approx 0{,}256$ c'est-à-dire $25{,}6\ \%$.

• Pour $[\text{méd} ; Q_3]$, il y a $151 - 100 = 51$ pays dedans soit $\dfrac{51}{199} \approx 0{,}256$ c'est-à-dire $25{,}6\ \%$.

Exercices résolus

À vous de jouer !

p. 317

1 Les valeurs sont les nombres d'élèves et les effectifs les nombres de classes.
L'effectif total est donc $1 + 3 + \ldots + 2 + 4 = 27$.
Le nombre moyen d'élèves par classe est :
$\dfrac{1 \times 16 + 3 \times 24 + \ldots + 4 \times 34}{27} \approx 29{,}8$.

2 Les valeurs sont les nombres de jours fériés et les effectifs les nombres de pays.
L'effectif total est donc $17 + 2 + 2 + 5 + 1 = 27$.
Le nombre moyenne de jours de congés payés est $\dfrac{17 \times 20 + 2 \times 22 + \ldots + 1 \times 28}{27} \approx 21{,}7$.

3 Les valeurs sont les prix et leurs coefficients respectifs leurs proportions.
Le prix moyen pondéré par les proportions est
$\dfrac{\frac{2}{3} \times 2{,}15 + \frac{1}{3} \times 3{,}3}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} \approx 2{,}53$ euros le kilo.

4 Sa moyenne est
$\dfrac{2 \times 14{,}5 + 1 \times 17 + 0{,}5 \times 12}{2 + 1 + 0{,}5} \approx 14{,}9$.

5 $7 \times 5 - 3 = 32$.

6 $\dfrac{4 + 1 + 7}{3} = 4$ de tête. On passe de la série 4 -1 -7 à la série $3\,504$ $-3\,501$ $-3\,507$ en ajoutant 3 500 donc sa moyenne est $3\,500 + 4 = 3\,504$.

7 **1.** Les résultats semblent plus réguliers pour la semaine 2 ce qui correspond à un écart-type plus petit.
2. Pour la semaine 1, l'écart-type est d'environ $8{,}3$. Pour la semaine 2, il est d'environ $1{,}3$. Cela confirme la réponse.

8 Dans la classe dont l'écart-type est $1{,}2$, les résultats des élèves sont plus homogènes car l'écart-type est plus petit. Concrètement, leurs résultats sont globalement plus proches de 12 alors que dans l'autre classe, les résultats en sont plus éloignés (au-dessus en en dessous).

9 Le tableau des effectifs cumulés croissants est :

Valeur	2	10	15	47	72
ECC	51	64	78	87	89

L'effectif total est 89.

- $\frac{89}{2}=44{,}5$ donc la médiane est la 45^e valeur c'est-à-dire 2.
- $0{,}25\times89=22{,}25$ donc Q_1 est la 23^e valeur c'est-à-dire 2.
- $0{,}75\times89=66{,}75$ donc Q_3 est la 67^e valeur c'est-à-dire 15.
- L'écart interquartile est $Q_3-Q_1=15-2=13$.

10 Le tableau des effectifs cumulés croissants est :

Valeur	1	2	3	4	5
ECC	2	6	11	22	24

L'effectif total est 24.

- $\frac{24}{2}=12$ donc la médiane est la moyenne des 12^e et 13^e valeur c'est-à-dire $\frac{4+4}{2}=4$.
- $0{,}25\times24=6$ donc Q_1 est la 6^e valeur c'est-à-dire 2.
- $0{,}75\times24=18$ donc Q_3 est la 18^e valeur c'est-à-dire 4.
- L'écart interquartile est $Q_3-Q_1=4-2=2$.

11 On peut penser que Clara lisait globalement plus de pages du livre 1 que du livre 2 par jour.
En effet, pour chaque indicateur, Q_1, médiane et Q_3, celui correspondant au livre 1 est plus élevé que celui correspondant livre 2.
On peut aussi comparer les indicateurs des deux séries ayant des valeurs similaires ou proches : par exemple, il y a au moins 50 % des jours où elle a lu 22 pages ou plus du livre 1 (la médiane est 22) alors qu'il y a au moins 75 % des jours où elle a lu 22 pages ou moins du livre 2 (le 3^e quartile est 22).

12 Non, on peut juste dire que le nombre de clients par jour était globalement plus homogène la 2e année.

Exercices résolution de problèmes

p. 322

13 Vérifier la moyenne

Un crayon de 5 m est aberrant.
Philippe a dû dû se tromper dans ses calculs.

14 Vérifier une médiane et ses quartiles

Il y a au moins deux erreurs.
Il n'est pas possible qu'environ un quart des pays de l'union européenne aient une espérance de vie de 7 ans donc $Q_1\neq7$, cette réponse est incohérente avec le problème posé
Il n'est pas non plus possible que la médiane soit supérieure au 3^e quartile ce qui est le cas ici, cette configuration est aberrante.

15 Répondre à un QCM

Une température mesurée dans une ville française ne peut pas être de $1\,573$ degrés (on peut écarter cette réponse).
En janvier, il est peu probable qu'elle soit de 32 °C : on peut écarter cette réponse.
On teste avec une des valeurs restantes, par exemple 6 : on trouve un écart-type de $4{,}27$ environ, c'est donc la bonne réponse.
Remarque : Avec la réponse -1, on aurait trouvé un écart-type de 4.

Exercices automatismes

p. 323

Rituel 1

16 15

17 11

18 Environ un quart de $165\,417$ TWh soit environ $40\,000$ TWh.

19 $0{,}9\times120=108$ adhérents. Il est cependant plus simple de dire que 10 % de 120 est 12 puis $120-12=108$.

Rituel 2

20 $\frac{40}{120}=\frac{1}{3}=0{,}33\approx33\%$.

21 $\frac{54}{2}=27$.

22 En 2009.

23 Fréquence minimale : $0{,}000\,26\ \%$
Fréquence maximale : $0{,}000\,35\ \%$

Rituel 3

24 15

25 $\frac{24}{2}=12$.

26 Sur l'axe des abscisses : les années.
Sur l'axe des ordonnées : le nombre de personnes en millions.

Rituel 4

27 Dans les années 1970.

28 110 €

29 On calcule de tête $400\times200=80\,000$.

Exercices d'entraînement

p. 324-330

Je consolide mes acquis

30 **Médiane et moyenne**

Prix moyen :

$$\frac{773+773+\ldots+899}{14}\approx 823{,}4 \text{ euros}$$

Prix médian : $\frac{817+829}{2}=823$ euros

La réponse est donc oui, mais de très peu.

31 **Diagramme circulaire**

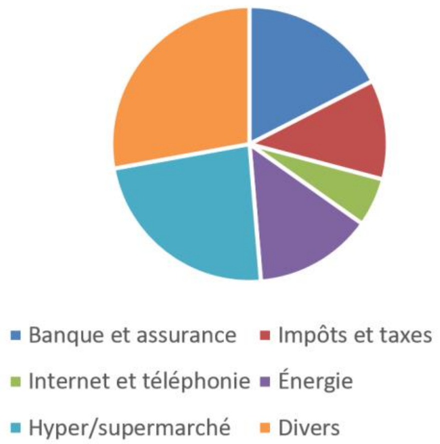
1. L'angle correspondant mesure environ 30 °.
On a donc :

$$2178\to360°$$
$$?\to30°$$

On calcule $\frac{2\,178\times30}{360}=181{,}50$ euros.

Étant donné la précision de la mesure d'angle, on peut arrondir à environ 180 euros (ou 185 euros car la mesure de l'angle est légèrement supérieur à 30°).

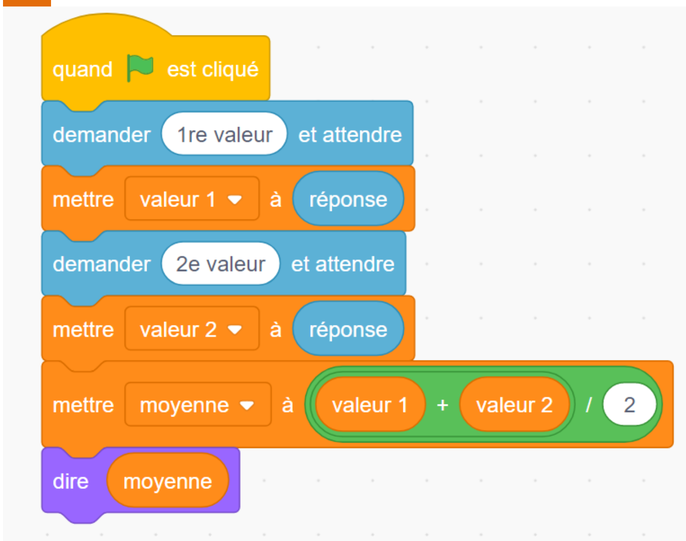
2.



32 **Interprétation de données**

Non, le PIB n'est pas un indicateur de richesse individuelle mais de l'activité économique.
Par ailleurs, le PIB par habitant est un PIB moyen et les moyennes peuvent cacher de grandes disparités.

33 **Scratch**



Questions de cours

34 $$\frac{c_1\times x_1+c_2\times x_2+c_3\times x_3+c_4\times x_4}{c_1+c_2+c_3+c_4}$$

35 La moyenne de la nouvelle série sera aussi multipliée par $1{,}2$.

36 L'homogénéité des valeurs de la série autour de la moyenne.

37 $\frac{n}{2}+0,5$.

38 Q_3-Q_1.

39 Au moins et généralement environ $25\ \%$.

Moyenne avec effectifs

40 L'effectif total est :
$299+162+\ldots+99=812$.
Le nombre moyen d'utilisateurs par compte est:
$\frac{299\times1+162\times2+\ldots+99\times5}{812}\approx2,46$.

41 L'effectif total est
$249+1\,062+\ldots+46=3159$.
Le nombre moyen d'habitants par logement est $\frac{249\times0+1062\times1+\ldots+46\times6}{3159}\approx2$.

42 Les centres des classes sont 55, 95, 145 et 205 et l'effectif total est $2+9+5+1=17$.
La durée moyenne d'un film d'après ces informations (incomplètes) est :
$\frac{2\times55+9\times95+5\times145+1\times205}{17}\approx111,47\,\text{min}$

43 Le prix moyen payé par un groupe est :
$0,18\times115+0,25\times130+0,24\times205+0,33\times220=175\,€$
Remarque : ici, on utilise la formule de la moyenne avec les fréquences car on ne connaît pas les effectifs.

Moyenne pondérée

44 $\frac{3\times12+1,5\times25+2\times5+7\times12}{3+1,5+2+7}\approx12,41$

45 $\frac{20\times16,3+5\times15,5+5\times18+5\times20}{20+5+5+5+2,5+2,5}+\frac{2,5\times16,5+2,5\times18}{20+5+5+5+2,5+2,5}\approx17$

46 **1.** $\frac{500\times7+120,5\times191}{500+120,5}\approx42,73$ €.
2. C'est le prix moyen au m².

47 1. Le prix moyen du KWh est le prix pondéré par la consommation soit :
$\frac{0,4\times0,147+0,6\times0,1841}{0,4+0,6}=0,169\,26$ €.
2. Il s'agit de résoudre
$183,63+0,169\,26x<169,89+0,174x$
$\Leftrightarrow -0,00474x<-13,74 \Leftrightarrow x>\frac{-13,74}{-0,00\,474}$
où $\frac{-13,74}{-0,00474}\approx2\,899$.
La famille est donc gagnante pour plus de $2\,899$ KWh consommés par an.

48

```
n1=float(input("Note ? "))
c1=float(input("Coefficient ? "))
n2=float(input("Note ? "))
c2=float(input("Coefficient ? "))
print((c1*n1+c2*n2)/(c1+c2))
```

49 Notons préalablement que la moyenne pondérée est :
$\frac{1,5\times5+4\times12+2\times15+c\times x}{1,5+4+2+c}=\frac{85,5+c\times x}{7,5+c}$
1. On résout $\frac{85,5+5x}{12,5}=22$
$\Leftrightarrow 85,5+5x=275 \Leftrightarrow 5x=189,5 \Leftrightarrow x=37,9$.
2. On résout $\frac{85,5+36c}{7,5+c}=20,625$
$\Leftrightarrow 85,5+36c=20,625(7,5+c)$
$\Leftrightarrow 85,5+36c=154,687\,5+20,625\,c$.
$\Leftrightarrow 15,375\,c=69,187\,5 \Leftrightarrow c=4,5$

Linéarité de la moyenne

50 **1.** 6
2. **a)** 6 000 **b)** 56

51 **a)** $\frac{37+13+10}{3}=20$ donc la moyenne cherchée est 820.
b) $\frac{15+12+1+4}{4}=8$ donc la moyenne cherchée est $8\,000$.

52 Toutes les valeurs de la série des revenus augmente de 150 euros donc le revenu moyen augmente de 150 euros. Il est alors de $2\,102+150=2\,252$ euros.

53 **1. a)** Si la boutique solde tous ses articles à $-50\ \%$, tous les prix seront multipliés par $1-\dfrac{50}{100}=0{,}5$.

b) D'après **1. a)**, le prix moyen sera $35{,}40\times0{,}5=17{,}70$ euros.

2. Si la boutique solde tous ses articles à $-30\ \%$, tous les prix seront multipliés par $1-\dfrac{30}{100}=0{,}7$ donc le prix moyen sera $35{,}40\times0{,}7=24{,}78$ euros.

54 Tous les gains cagnottés sont multipliés par $1+\dfrac{10}{100}=1{,}1$

donc le gain moyen cagnotté est multiplié par $1{,}1$.

Il sera donc de $2{,}53\times1{,}1=2{,}783$ €

55 La moyenne a été multipliée par $1+\dfrac{t}{100}$.

Donc

$$1+\frac{t}{100}=\frac{20{,}02}{15{,}4}$$

: $\Leftrightarrow 1+\dfrac{t}{100}=1{,}3$.

$\Leftrightarrow t=30$

56 **a)** $\dfrac{4+9+5}{3}=6$.

On passe de la série 4 –9 –5 à la série 407 –907 –507 en multipliant par 100 et ajoutant 7 :

il en va de même de la moyenne qui est donc $100\times6+7=607$.

b) $\dfrac{8+9+0+5+3}{5}=5$.

On passe de la série 8 –9 –0 –5 –3 à la série $8\,541-9\,541-541-5\,541-3\,541$ en multipliant par $1\,000$ et ajoutant 541 :

il en va de même de la moyenne qui est donc $1\,000\times5+541=5\,541$.

Détermination d'écart-type

57 **a)** $\approx 40{,}46$

b) $\approx 4{,}2$

58 La moyenne est environ $4{,}39$ et l'écart-type environ $2{,}14$ d'après la calculatrice.

59 L'effectif total est $1+4+2+5+3+4+1=20$.

La moyenne est $\dfrac{1\times0+4\times2+\ldots+1\times8}{20}=4{,}05$.

L'écart-type

$$\sqrt{\frac{1\times(0-4{,}05)^2+4\times(2-4{,}05)^2+\ldots+1\times(8-4{,}05)^2}{20}}\approx1{,}86$$

.

Il est conseillé de saisir d'abord le numérateur de la fraction dans la calculatrice (on obtient 68,95).

60 **1.** La calculatrice donne $m\approx4{,}58$ et $s\approx0{,}97$.

2. $m-2s\approx2{,}64$ et $m+2s\approx6{,}52$.

On constate que, malgré l'imprécision due à l'arrondi, l'intervalle contient les valeurs 3 ; 4 et 5 c'est-à-dire $1\,135+3\,182+21\,909=26\,226$ valeurs sur $26\,226+1\,239+384=27\,849$.

Cela représente une proportion de $\dfrac{26\,226}{27\,849}\approx0{,}94$ soit $94\ \%$ environ.

61 **Vérifier un résultat**

1.a) La calculatrice donne une moyenne d'environ $17{,}3$ et un écart-type d'environ $19{,}7$.

b) Non, car une valeur semble aberrante. L'angle semble mesurer entre 11 et 13 degrés.

2. $91\,°$ semble être aberrante.

3. La calculatrice donne une moyenne d'environ $12{,}1$ et un écart-type d'environ $0{,}8$.

4. Oui, on voit que ces deux indicateurs peuvent grandement changer selon que l'on écarte une valeur extrême ou non.

62 Les centres des classes sont 55, 95, 145 et 205.

En utilisant ces valeurs, on trouve un écart-type d'environ $36{,}93$.

Utiliser l'écart-type

63 Un grand écart-type indique des températures moins homogènes ce qui correspond à Grenoble.

64 L'action n° 2 ayant un écart-type de sa cotation plus faible signifie que sa cotation est restée proche de 25 euros sur cette période. Pour l'action n° 1, on peut penser qu'elle s'est plus éloignée de 25 euros, au-dessus et en dessous.

65 Les valeurs de la série représentée en orange semblent globalement plus proches de 5 donc son écart-type est plus petit.

66 La série 1 semble avoir ses valeurs globalement plus proches de 16 puis c'est la série 2 et enfin la série 3.
On peut donc penser que $s_1 < s_2 < s_3$.

Déterminer médiane et quartiles

67 Le tableau des ECC est :

Nombre de fruits et légumes	0	1	2	3	4	5	6	7
ECC	9	121	214	316	436	563	664	891

L'effectif total est 891.

- $\dfrac{891+1}{2} = 446$ donc la médiane est la 446^{e} valeur c'est-à-dire 5.
- $0{,}25 \times 891 = 222{,}75$ donc Q_1 est la 223^{e} valeur c'est-à-dire 3.
- $0{,}75 \times 891 = 668{,}25$ donc Q_3 est la 669^{e} valeur c'est-à-dire 7.
- L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1 = 7 - 3 = 4$.

68 Le tableau des ECC est :

Valeur	0	2	3	4	5	6	8
ECC	1	5	7	12	15	19	20

L'effectif total est 20.

- $\dfrac{20}{2} = 10$ donc la médiane est la moyenne des 10^{e} et 11^{e} valeurs c'est-à-dire $\dfrac{4+4}{2} = 4$.
- $0{,}25 \times 20 = 5$ donc Q_1 est la 5^{e} valeur c'est-à-dire 2.
- $0{,}75 \times 20 = 15$ donc Q_3 est la 15^{e} valeur c'est-à-dire 5.
- L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1 = 5 - 2 = 3$.

69 Le tableau des ECC est :

Valeur	1	2	3	4	5
ECC	1 239	1 623	2 758	5 940	27 849

L'effectif total est 27 849.

- $\dfrac{27\,849+1}{2} = 13\,925$ donc la médiane est la $13\,925^{e}$ valeur c'est-à-dire 5.
- $0{,}25 \times 27\,849 = 6\,962{,}25$ donc Q_1 est la $6\,963^{e}$ valeur c'est-à-dire 5.
- $0{,}75 \times 27\,849 = 20\,886{,}75$ donc Q_3 est la $20\,887^{e}$ valeur c'est-à-dire 5.
- L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1 = 5 - 5 = 0$.

70 **1.** Environ 55 % de ces personnes a un revenu annuel de $20\,000$ € ou moins.
2. $Q_1 \approx 14\,000$ €, médiane $= 19\,000$ € et $Q_3 \approx 25\,500$ € (on regarde les revenus correspondant à 25 %, 50 % et 75 %).

71 **Analyser un problème pour le résoudre**
Sous forme de tableau, par exemple :

Valeur	1	5	12	22	30	46
Effectif	2	4	6	1	6	1

Comparer avec la médiane et les quartiles

72 **1.** Pour les licences féminines, l'écart interquartile est $113\,705 - 116\,34 = 102\,071$.
Pour les licences masculines, l'écart interquartile est $154\,139 - 18\,553 = 135\,586$.
Il y a $102\,071$ licenciés d'écart entre les nombres de licences féminines des fédérations correspondant au 1er quart et au 3e quart.
Il y a $135\,586$ licenciés d'écart entre les nombres de licences masculines des fédérations correspondant au 1er quart et au 3e quart.
2. a) 830 est le minimum et $11\,634$ le premier quartile donc il y a environ 25 % des fédérations qui ont un nombre de licenciées féminines entre ces deux valeurs.
b) $18\,553$ est le premier quartile et $154\,139$ est le troisième quartile donc il y a environ 50 % des fédérations qui ont un nombre de licenciés masculins entre ces deux valeurs.

4. On constate que, pour tous les indicateurs, ceux correspondant au nombre de licences masculines sont supérieurs à ceux correspondant aux licences féminines donc on peut dire qu'il y a globalement plus de licenciés masculins que de licenciées féminines dans ces fédérations.

73 Esprit critique

1. a) 1208 est le premier quartile et 1884 est le troisième quartile, il y a donc environ 50 % des piscines avec bassin intérieur qui ont un cout de fonctionnement au m² compris entre ces deux valeurs.

b) 417 est le troisième quartile, il y a donc environ 75 % des piscines avec bassin extérieur qui ont un coût de fonctionnement au m² compris inférieur à cette valeur.

2. On voit que tous les indicateurs correspondant aux piscines avec bassin extérieur sont très inférieurs à ceux correspondant aux piscines avec bassin intérieur donc on peut dire que, globalement, les piscines avec bassin extérieur sont moins coûteuses.

On peut, par exemple, expliquer cela par le fait que ces piscines avec bassin extérieur ne sont pas ouvertes toute l'année mais autour des mois d'été alors que les piscines avec bassin intérieur sont ouvertes toute l'année ce qui induit des coûts inférieurs en entretien et salaires. Par ailleurs, les piscines avec bassin extérieur doivent être chauffées (eau et bâtiment) ce qui induit des coûts supplémentaires.

Le but de cet exercice, au-delà d'un exercice de comparaison de séries statistiques à l'aide de la médiane et des quartiles, est de permettre à l'élève d'aiguiser son esprit critique en essayant de trouver des raisons à ces différences. On pourra d'ailleurs encourager les élèves à effectuer des recherches documentaires afin de vérifier leurs propositions d'explication.

74 **1. a)** $2+1+1+4+5+3+4+4+2+1=27$ et $\frac{27}{30}=0,9$ donc l'éolienne aurait pu fonctionner 90 % des jours.

b) Le tableau des ECC est :

Valeur	7	14	16	18	20	22
ECC	1	3	4	5	9	14

Valeur	24	26	27	30	44	50
ECC	17	21	25	27	28	30

• $\frac{30}{2}=15$ donc la médiane est la moyenne des 15ᵉ et 16ᵉ valeurs c'est-à-dire $\frac{24+24}{2}=24$.

• $0,25\times30=7,5$ donc Q_1 est la 8^{e} valeur c'est-à-dire 20.

• $0,75\times30=22,5$ donc Q_3 est la 23^{e} valeur c'est-à-dire 27.

• L'écart interquartile est $Q_3-Q_1=27-20=7$.

2. Comme 22 est la médiane et 34 le 3^{e} quartile, on peut dire que la vitesse du vent a été entre ces deux valeurs au moins 25 % du temps et non 50 %.

3. Les deux sites ont une médiane proche de 23 (respectivement 24 et 22) mais on voit que l'écart interquartile est 7 pour la montagne et $34-14=20$ pour la falaise. Cela veut dire que les valeurs centrales de la série des vitesses du vent sont globalement nettement plus éloignées de la médiane pour la falaise qui est donc un site moins pertinent.

Comparaisons graphiques

75 **1.** On remarque que le patrimoine moyen est nettement supérieur au patrimoine médian.

2. La moyenne étant sensible aux valeurs extrêmes, contrairement à la médiane, cela veut dire que les moyennes sont tirées vers le haut par des patrimoines élevés, on peut donc penser que quand l'écart entre patrimoine moyen et patrimoine médian est élevé, les patrimoines sont inégalement répartis.

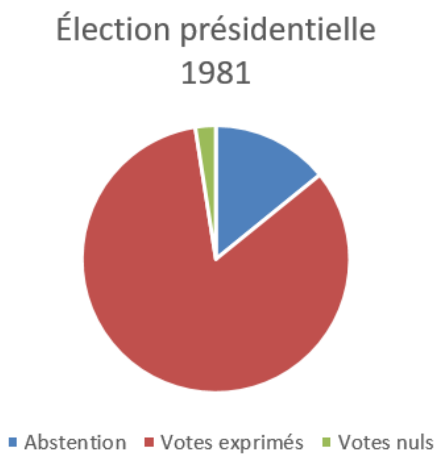
76 **1.** On remarque que le budget moyen est nettement supérieur au budget médian.

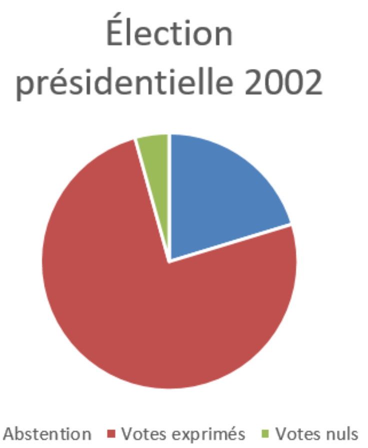
2. La moyenne étant sensible aux valeurs extrêmes, contrairement à la médiane, cela veut dire que les moyennes sont tirées vers le haut par des budgets élevés, on peut donc penser que les budgets moyens sont tirés vers le haut par des foyers ayant des dépenses de jardinage très élevées.

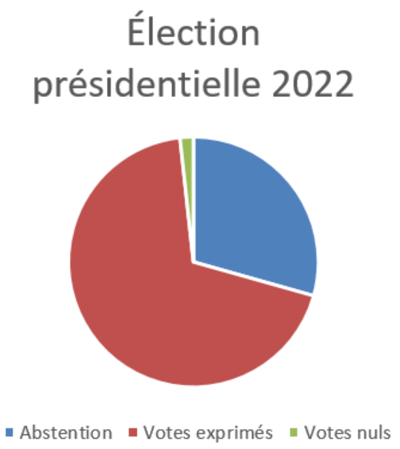
77 **1.** Pour une femme seule : $Q_1 \approx 14300$, médiane $\approx 18\,700$ et $Q_3 = 25\,000$.
Pour un homme seul : $Q_1 \approx 14\,300$, médiane $\approx 19\,300$ et $Q_3 = 26\,300$.
2. On constate que, pour ces indicateurs, ceux des femmes sont toujours inférieurs à ceux des hommes, cet écart augmentant quand les revenus augmentent donc on peut en déduire que les femmes ont des revenus globalement moins importants que les hommes.
On note cependant que ce n'est pas le cas pour les revenus faibles (inférieurs au 1er quartile).

78 **1.** On constate que, depuis 2010, la fréquence de « événement » diminue clairement en tendance et que celle de « évènement » augmente.
2. Depuis la réforme de l'orthographe en 1990, les deux orthographes sont correctes. On constate cependant que l'orthographe « événement » reste la plus utilisée.

78 **1.**

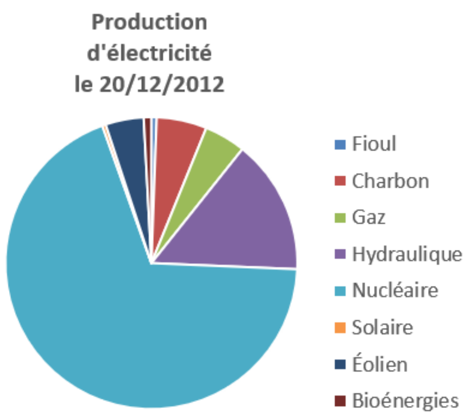




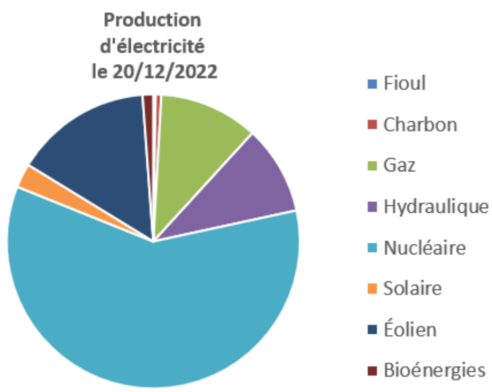


2. On observe une augmentation de la part d'abstention et une diminution de la part des votes exprimés.

80 **1. a)**



b)



2. On constate :
• une diminution de la part du nucléaire et de l'hydraulique ainsi qu'une quasi-disparition du charbon,
• une augmentation nette de la part de l'éolien, du gaz et du solaire.

3. a) Dans la série de 2012, il semble y avoir une assez grande disparité dans les valeurs alors que la série de 2022 semble plus équilibrée.
b) Pour 2012, on trouve environ $17\,784$ et pour 2022 environ $12\,453$.
4. On constate donc qu'il y a eu un équilibrage (relatif) des sources de production d'électricité.

Études statistiques

81 Histoire des sciences
C'est la moyenne.

82 1. a) Le tableau des ECC est :

Valeur	3	4	5	6	7	10
Effectif	24	40	62	90	115	120

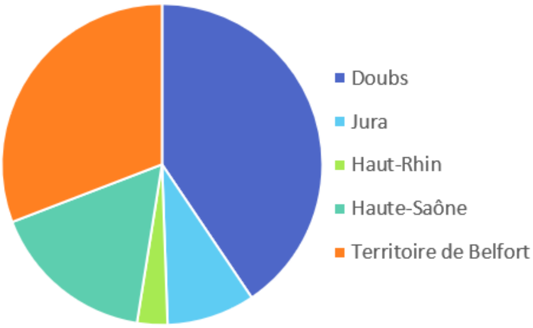
• $\frac{120}{2}=60$ donc la médiane est la moyenne des 60^{e} et 61^{e} valeurs c'est-à-dire $\frac{5+5}{2}=5$.
• $0,25\times120=30$. donc Q_1 est la 30^{e} valeur c'est-à-dire 4.
• $0,75\times120=90$ donc Q_3 est la 90^{e} valeur c'est-à-dire 6.
• L'écart interquartile est $Q_3-Q_1=6-4=2$.
• Le minimum est 3 et le maximum est 10.
b) $Q_1=4$ donc on peut affirmer qu'au moins $75\ \%$ des cartons contenait 4 carreaux cassés ou plus.
2.a) La moyenne est $5,325$ et l'écart-type est environ $1,71$.
b) $m-2s\approx1,9$ et $m+2s\approx8,75$ donc, quel que soit l'arrondi, les valeurs de la série dans $[m-2s;m+2s]$ sont 3 ; 4 ; 5 ; 6 et 7 c'est-à-dire 115 valeurs sur 120.
$\frac{115}{120}\approx0,958$ donc il y a environ $95,8\ \%$ des valeurs dans cet intervalle.
3.a) On voit que les quartiles, la médiane et la moyenne ont baissé donc on peut en effet penser que ce changement est efficace.
b) En moyenne par carton, l'entreprise est passée de $5,325\times0,60=3,195$ euros de remboursement à $4,14\times0,6=2,484$ euros soit $0,711$ euros d'économie.
Comme les nouveaux cartons coûtent $0,50$ euros, les adopter fera toujours économiser $0,711-0,5=0,211$ par rapport aux précédents.

83 1.a) On range cette série de 18 valeurs dans l'ordre croissant, la série est
$16,6-16,8-17-17,7-18,3-18,3-18,7-18,7-18,7-18,7-19,6-20,3-20,3-20,5-20,9-21,9-22-22,1$
Le minimum est $16,6$, le premier quartile est $18,3$ (5^{e} valeur), la médiane est $18,7$ (moyenne des 9^{e} et 10^{e} valeurs), le 3^{e} quartile est $20,5$ (14^{e} valeur) et le maximum est $22,1$.
b) Certains indicateurs ont augmenté entre 2010 et 2020 : le minimum ($+1,3$), Q_1 ($+0,4$), le 3^{e} quartile ($+0,4$) et d'autres ont diminué : la médiane ($-0,1$) et le maximum ($-0,6$).
Par ailleurs, l'écart interquartile est resté identique à $2,2$ et l'étendue a diminué passant de $7,4$ à $5,5$. L'analyse n'est pas évidente et on peut penser que les nombres moyens d'élèves par classe ont globalement légèrement augmenté et qu'ils sont légèrement plus homogènes entre pays.
c) En 2019-2020 la moyenne de la série était de $19,3$ et l'écart-type de $1,7$. Cela confirme l'interprétation de la question 1.b) (légère augmentation et légèrement plus homogène).
2. Pour le collège, on constate plutôt une diminution des nombres d'élèves moyens et une répartition légèrement moins homogène entre pays.
Le seul indicateur ne pointant pas une diminution est le maximum : cela indique qu'au moins un pays a augmenté ses effectifs par classe. Ceci pourrait aussi expliquer en partie l'augmentation légère de l'écart-type, celui-ci étant sensible aux valeurs extrêmes.
3. Non, au contraire, il a plutôt diminué à l'école primaire et augmenté au collège.

84 Esprit critique
1. $m\approx55$ et $s\approx28$.
Ces indicateurs n'ont absolument aucun sens ! Comme c'est expliqué question suivante, il faut considérer les « valeurs » comme des symboles et non des nombres.

On aurait tout aussi bien pu écrire Doubs, Jura, Haut-Rhin, Haute-Saône et Territoire de Belfort !

2. Avec un diagramme circulaire par exemple (c'est généralement un bon choix pour les séries qualitatives) :



Il a été construit avec le tableau suivant.

Département	Angle
Doubs (25)	146°
Jura (39)	32°
Haut-Rhin (68)	11°
Haute-Saône (70)	60°
Territoire de Belfort (90)	111°

Il est important que les élèves comprennent sur quel type de données ils travaillent. Ici, le but de l'exercice est de constater que, bien que les valeurs soient numériques, la série n'est pas quantitative : faire des calculs sur les valeurs n'a donc aucun sens.

85 **1.** Le débit est plus élevé à Vernon car le nuage de points est globalement plus haut.
Il est plus homogène à Alfortville car le nuage de points est globalement plus resserré.

2. a) • Pour Alfortville, on a :

Débit à Alfortville	75	125	175
Nombre de jours	28	58	5

La calculatrice donne une moyenne d'environ $112\ \text{m}^3/\text{s}$ et un écart-type d'environ 27.

• Pour Vernon, on a :

Débit à Vernon	75	125	175
Nombre de jours	28	58	5

La calculatrice donne une moyenne d'environ $234\ \text{m}^3/\text{s}$ et un écart-type d'environ 38.
Cela confirme les résultats de la question 1.

b) $14+51+21+5=91$ et $0{,}25\times 91=22{,}75$ donc Q_1 est la 23^{e} valeur qui est donc entre 200 et $250\ \text{m}^3/\text{s}$.

c) Comme le premier quartile correspondant à Vernon est entre 200 et $250\ \text{m}^3/\text{s}$, cela veut dire que le débit a été supérieur ou égal à 200 au moins $75\ \%$ des jours. Comme le maximum pour Alfortville est inférieur à $200\ \text{m}^3/\text{s}$ cela justifie l'affirmation de l'énoncé.

3. Vernon étant situé plus loin sur le cours de la Seine, celle-ci reçoit de l'eau de plus d'affluents, il est donc normal que le débit y soit plus élevé.

À chacun son rythme

86

Énoncé A

1. a) La calculatrice donne $m\approx 26{,}81$ et $s\approx 3{,}03$.

b) $m-2s\approx 20{,}75$ et $m+2s\approx 32{,}88$ donc, quel que soit l'arrondi, les valeurs dans cet intervalle sont les valeurs entières entre 21 et 32 : il y en a 26 sur 27.

$\frac{26}{27}\approx 0{,}96$ donc il y a environ $96\ \%$ des valeurs dans cet intervalle.

2. Le tableau des ECC est :

Âge	19	20	21	22	23	24	25	26
ECC 2021	1	2	3	5	7	9	11	15

Valeur	27	28	29	30	31	32	33	34
ECC 2021	17	18	23	25	25	25	26	27

La médiane est 27 (14^{e} valeur), le premier quartile est 24 (7^{e} valeur), le 3^{e} quartile est 30 (21^{e} valeur) donc l'écart interquartile est $30-24=6$.

Énoncé B

1. Le tableau des ECC est :

Âge	20	21	22	24	25	26
ECC 2012	1	2	3	6	10	12

Valeur	27	28	29	30	31	32
ECC 2012	14	16	22	25	26	27

La médiane est 27 (14^{e} valeur), le premier quartile est 25 (7^{e} valeur), le 3^{e} quartile est 29 (21^{e} valeur) donc l'écart interquartile est $29-25=4$.

2. a) $Q_1 = 25$ et $Q_3 = 29$ donc au moins la moitié des valeurs est dans l'intervalle $[25;29]$.

b) $Q_3 = 29$ donc au moins 25 % des valeurs lui sont supérieurs et non 75 % (50 % au moins des valeurs sont inférieures à la médiane 27).

Énoncé C.

En 2012 : la moyenne est environ $26,81$ et l'écart-type environ $3,03$.
En 2021 : la moyenne est environ $27,03$ et l'écart-type environ $3,62$.
Ces indicateurs incitent à penser que les âges moyens de départ du domicile parental par pays de l'union européenne ont légèrement augmenté et sont moins homogènes selon les pays de l'union européenne.
Les quartiles et médiane sont eux passés respectivement de 25, 27 et 29 à 24, 27 et 30, cela confirme une évolution faible et une augmentation de l'hétérogénéité.

Dans l'énoncé A, l'élève se contente de calculer des valeurs d'indicateurs (et une proportion), compétence de base pour ce chapitre.
Dans l'énoncé B, on ajoute une dose d'interprétation guidée des quartiles.
Enfin, dans l'énoncé C, on ne donne aucune indication et l'élève détermine seul les éléments dont il a besoin pour comparer les deux séries statistiques.

Exercices de synthèse p. 331

87 Moyenne, médiane, écart-type et quartiles

A ▶ 1. Comme tous les salaires augmentent de 10 %, ils sont multipliés par $1+\dfrac{10}{100}=1,1$: il en va donc de même pour le salaire moyen par linéarité de la moyenne.
Il est alors de $2\,339,50 \times 1,1 = 2\,573,45$ euros.

2. Comme tous les salaires augmentent de 200 euros, il en va donc de même pour le salaire moyen par linéarité de la moyenne. Il est alors de $2\,339,50+200=2\,539,50$ euros.

3. On peut penser que ce sera la modalité 1 puisque le salaire moyen augmentera plus.

B ▶ 1. Le salaire moyen est

$$\frac{15\times 1\,450+10\times 1\,510+15\times 1\,925+10\times 5\,125}{15+10+15+10}$$
$= 2\,339,50$ euros

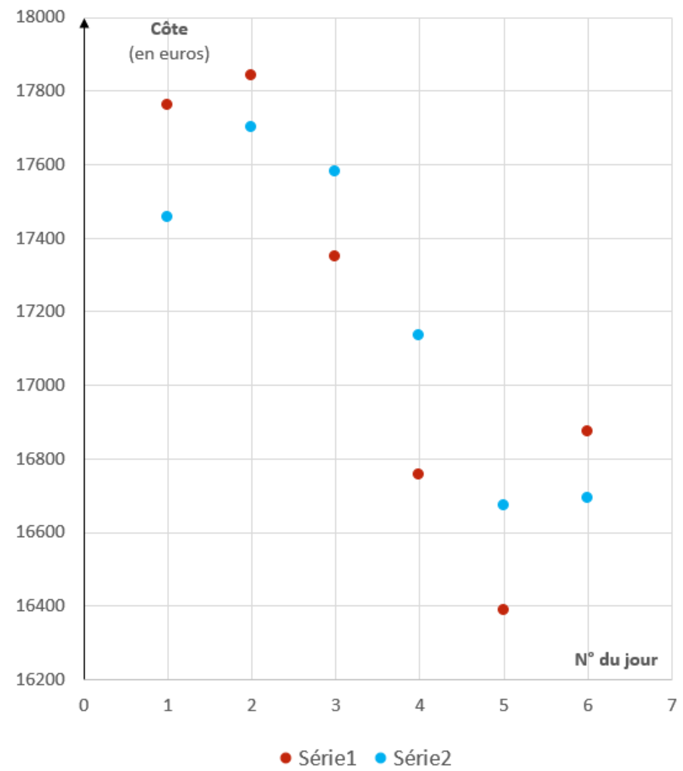
et l'écart-type associé est environ $1406,53$ d'après la calculatrice.

2. $Q_1 = 1\,450$ (13^e valeur), médiane $= 1\,717,5$ (moyenne des 25^e et 26^e valeurs) et $Q_3 = 1\,925$ (38^e valeur). L'écart interquartile est donc $1925-1450=475$.

3. Avec une augmentation de 10 %, tous les employés gagnant $1\,450$ euros, $1\,510$ euros ou $1\,915$ euros gagneront moins qu'avec une augmentation de 200 euros. Comme ils sont 40 sur 50, le résultat du vote est normal.

88 Moyenne pondérée et écart-type

1. En rouge.



2. a) Non, car on ne connaît pas les cotes des jours précédents.

b) $\dfrac{3\times 17\,349+2\times 17\,840+1\times 17\,761}{3+2+1} \approx 17581$.

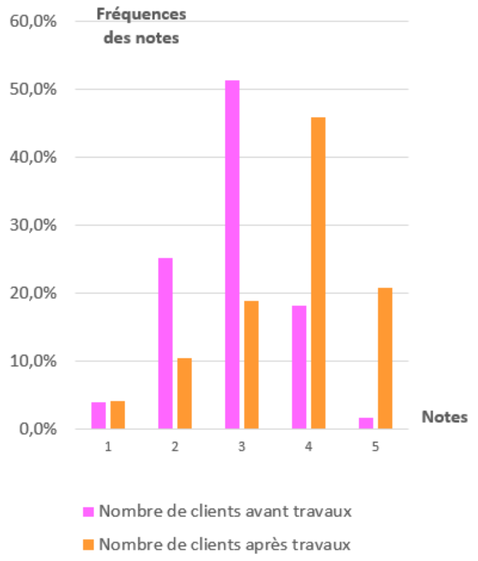
c) Jour 4 :
$\dfrac{3\times 16755+2\times 17349+1\times 17840}{3+2+1} \approx 17134$.
De même, on trouve $16\,671$ pour le jour 5 et $16\,692,5$ pour le jour 6.

d) En bleu sur le graphique précédent.

3. a) On voit que le nuage de points correspondant aux moyennes mobiles est plus resserré, on peut donc penser que l'écart-type associé aux moyennes mobiles est plus petit.
b) La calculatrice donne un écart-type d'environ 532 pour les cotes brutes et environ 409 pour leurs moyennes mobiles. Cela confirme le résultat de la question précédente.
4. Cela permet de lisser les « courbes » ce qui permet de mieux observer les tendances.

89 Comparaison de séries

1. La calculatrice donne une moyenne d'environ $2{,}88$ et un écart-type d'environ $0{,}8$.
2. a) L'effectif total est 127.
Le premier quartile est 2 (32^{e} valeur), la médiane est 3 (64^{e} valeur) et le 3^{e} quartile est 3 (96^{e} valeur).
b) $Q_3 = 3$ donc on peut affirmer qu'au moins 75 % des clients ont donné une note inférieure ou égale à 3.
3. • $\dfrac{5}{127} \approx 0{,}039$ soit environ $3{,}9$ %,
• $\dfrac{32}{127} \approx 0{,}252$ soit environ $25{,}2$ %,
• $\dfrac{65}{127} \approx 0{,}512$ soit environ $51{,}2$ %,
• $\dfrac{23}{127} \approx 0{,}181$ soit environ $18{,}1$ % et
$\dfrac{2}{127} \approx 0{,}016$ soit environ $1{,}6$ %.
On obtient le graphique en rose :



4. a) Après calcul (les fréquences sont arrondies à 0,1 %) :

Nombre d'étoiles	1	2	3	4	5
Nombre de clients (en %)	4,2	10,4	18,8	45,8	20,8

On obtient le diagramme en orange sur le graphique précédent.
b) On observe immédiatement que les notes sont meilleures après aménagement car le diagramme est décalé vers la droite. En termes d'homogénéité, on peut penser que les notes après aménagement sont moins homogènes car les valeurs « extrêmes » semblent un peu plus fréquences.
c) La nouvelle moyenne est d'environ 3,69 contre $2{,}88$ précédemment, ce qui confirme que les notes sont globalement meilleures.
Le nouvel écart-type est environ $1{,}04$ contre 0,8 précédemment, ce qui confirme également des notes légèrement plus hétérogènes.

90 Moyenne et médiane

Il y a énormément de possibilités mais on peut considérer une série dont toutes les valeurs sont 25 sauf la dernière. Sa médiane est alors 25. On cherche la dernière valeur x telle que
$\dfrac{99 \times 25 + x}{100} = 30 \Leftrightarrow x = 525$.

Exercices d'approfondissement

p. 332

91 Moyenne des sous-groupes

1. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n \times \overline{x}$ et
$y_1 + y_2 + \ldots + y_p = p \times \overline{y}$.
Ainsi la moyenne de la série de toutes les valeurs est:
$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + y_1 + y_2 + \ldots + y_p}{n+p} = \frac{n \times \overline{x} + p \times \overline{y}}{n+p}$$
.
2. $\dfrac{51 \times 21 + 1\,026 \times 52}{51 + 1\,026} \approx 50{,}53$ minutes c'est-à-dire 50 minutes et 32 secondes environ.

92 Notation somme

1. $\sum_{i=5}^{10} x_i$

2. $x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{11} + x_{13} + x_{15} + x_{17}$

3. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 9^2 + 10^2 = 385$.

93 Une autre formule

D'après le cours :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2mx_i + m^2\right)}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} -2mx_i + \sum_{i=1}^{n} m^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2m\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{nm^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2m \times m + m^2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - m^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2$$

94 Décomposer un problème en sous-problèmes

1. Il affiche le 1er quartile d'une série de valeurs (rentrées dans l'ordre croissant avec l'effectif total spécifié au départ).

2. Il suffit de changer la condition en : `while i<3*n/4`.

3. On a :

```
n = input("Saisir effectif : ")
n=int(n)
print("Votre série doit être triée !")
x = input("Saisir 1re valeur : ")
x=float(x)
i=1
if n%2==1:
      while i!=(n+1)/2:
            x = input("Valeur ? ")
            x=float(x)
            i=i+1
      print(x)
else :
      while i!=n/2:
            x = input("Valeur ? ")
            x=float(x)
            i=i+1
      y = input("Valeur ? ")
      y=float(y)
      print((x+y)/2)
```

95 Linéarité de l'écart-type

1. Non. Contre-exemple : l'écart-type de la série 1 – 1 – 1 est 0. Si on ajoute $a = 2$ à toutes les valeurs, on obtient la série $3 -3 -3$ dont l'écart-type est également 0 et non $0+2=2$.

2. La moyenne de la nouvelle série est $m+a$ où m est la moyenne de la série de départ. Dans la formule de l'écart-type du cours pour la nouvelle série, pour tout i, on a $((x_i + a) - (m+a))^2 = (x_i - m)^2$.

En sommant, divisant par n puis considérant sa racine carrée, on obtient bien le même écart-type que la série de départ.

Vers la 1re

96 Vers la Spécialité Maths

a) On a :

Issues	10	–2
Probabilités	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

L'espérance associée est $\frac{1}{6} \times 10 + \frac{5}{6} \times (-2) = 0$.

b) On a :

Issues	–10	10
Probabilités	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

L'espérance associée est :

$\frac{19}{37} \times (-10) + \frac{18}{37} \times 10 = -\frac{10}{37}$.

c) On a :

Issues	1	2	3	4
Probabilités	0,2	0,35	0,15	0,3

L'espérance associée est :

$0{,}2 \times 1 + 0{,}35 \times 2 + 0{,}15 \times 3 + 0{,}3 \times 4 = 2{,}55$.

97 Vers STL

On a $n = 20$, $m = 2{,}984$ et $s \approx 0{,}101$.

$\left[m - 2\frac{s}{\sqrt{n-1}} ; m + 2\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right]$ est donc approximativement $[2{,}937 ; 3{,}031]$ (borne inférieure arrondie par défaut et borne supérieure par excès).

Préparer le contrôle
Je me teste p. 334

Objectif 1 Calculer une moyenne

98 C **99** A **100** A et D

Objectif 2 Déterminer un écart-type

101 D **102** A

Objectif 3 Utiliser la médiane et les quartiles

103 A **104** B **105** C

Objectif 4 Comparer deux séries statistiques

106 C

107 A et D

108 A et D

109 B

110 C

Préparer le contrôle
Je m'entraîne p. 335

Objectif 1 Calculer une moyenne

111 $\dfrac{1\times17+2{,}5\times25+3\times1}{1+2{,}5+3}\approx17{,}31$.

112 La moyenne de 3 ; 7 ; 9 et 1 est 5. On passe de la série $3 - 7 - 9 - 1$ à la série $312 - 712 - 912 - 112$ en multipliant par 100 puis ajoutant 12 : il en va de même pour la moyenne qui est donc $5\times100+12=512$ d'après la propriété de linéarité de la moyenne.

113 La moyenne pondérée est $\dfrac{2\times5+3\times12+c\times8}{2+3+c}=\dfrac{46+8c}{5+c}$.

Il s'agit de résoudre $\dfrac{46+8c}{5+c}=8{,}96 \Leftrightarrow 46+8c=8{,}96(5+c)$
$\Leftrightarrow 46+8c=44{,}8+8{,}96c \Leftrightarrow -0{,}96c=-1{,}2 \Leftrightarrow c=1{,}25$

Objectif 2 Déterminer un écart-type

114 L'écart-type est environ 25,3.

115 La série représentée en vert est plus homogène, son écart-type est donc plus petit : c'est $1{,}5$.

116 La moyenne est $\dfrac{4\times180+4\times200+\ldots+3\times250}{4+4+2+2+3}=210$.

L'écart-type est donc

$$\sqrt{\frac{4\times(180-210)^2+4\times(200-210)^2+2\times(210-210)^2+2\times(230-210)^2+3\times(250-210)^2}{15}}\approx25{,}3.$$

Objectif 3 Utiliser la médiane et les quartiles

117 **1.** La médiane est 5 (moyenne des 20^{e} et 21^{e} valeurs).
2. $Q_1=3$ (10^{e} valeur) et $Q_3=6$ (30^{e} valeur).
L'écart interquartile est $6-3=3$.

118 **1.** La médiane est 5 et le maximum est 9 donc on peut affirmer qu'au moins 50 % des élèves ont réussi entre 5 et 9 services.
2. Le 3^{e} quartile est 6 donc on peut affirmer qu'au moins 25 % des élèves ont réussi 6 services ou plus.

119 On déduit des informations que le premier quartile est 5. Il faut donc que, dans l'ordre croissant, la 2^e valeur soit 5, la moyenne des 4^e et 5^e valeurs soit 12 et que la 6^e valeur soit 15.
$0-5-6-10-14-15-20-25$.

Objectif 4 Comparer deux séries statistiques

120 Le coureur représenté en bleu a couru constamment alors que celui représenté en orange a couru plus vite au début qu'à la fin de la course.

121 Le magazine dont les ventes mensuelles ont un écart-type de 123 a des ventes mensuelles régulières alors que celui qui a un écart-type de 612 a des ventes moins régulières plus éloignées de la moyenne au-dessus et en dessous.

122 Pour cette nouvelle série : $Q_1=4$, $\text{médiane}=6$ et $Q_3=10$.
Ces indicateurs étant tous plus élevés que ceux de l'exercice 117, on peut penser que les élèves se sont améliorés.
L'écart interquartile étant passé de 3 à 6, le niveau est devenu plus hétérogène.
Avec la moyenne et l'écart-type :
La moyenne est passé de $4{,}625$ à $6{,}575$: cela confirme une amélioration du niveau.
L'écart-type est passé d'environ $2{,}38$ à environ $2{,}9$: cela confirme une plus grande hétérogénéité.

Travaux pratiques

p. 336-339

1 Calculatrice, moyenne et écart-type

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Calculer moyenne et écart-type d'une série statistique à l'aide de la calculatrice.

2 Calcul de la moyenne et de l'écart-type

- **Durée estimée :** 50 min
- **Objectif :** Observer graphiquement dans quelles conditions, on peut s'attendre à ce qu'environ 95 % des valeurs d'une série soient dans l'intervalle $[m-2s\,;m+2s]$.

1. $\sqrt{\dfrac{2^2+12^2+15^2}{3}-\left(\dfrac{2+12+15}{3}\right)^2}\approx 5{,}56$.

2. Voir question **4.**

3. a) La moyenne est `somme1/n`.

b) L'écart-type est la racine carrée de `somme2/n-(somme1/n)**2`.

4.

```
import math
def calcul_moyenne_ecarttype(n) :
      somme1=0
      somme2=0
      for i in range(1,n+1) :
            x=float(input("Nouvelle valeur ?"))
            somme1=somme1+x
            somme2=somme2+x**2
      m=somme1/n
      s=math.sqrt(somme2/n-m**2)
      print("La moyenne est",m)
      print("L'écart-type est",s)
```

7.

```python
import math
def calcul_moyenne_ecarttype(n) :
      somme1=0
      somme2=0
      for i in range(1,n+1) :
            x=float(input("Nouvelle valeur ?"))
            somme1=somme1+x
            somme2=somme2+x**2
      m=somme1/n
      s=math.sqrt(somme2/n-m**2)
      print("La moyenne est",m,"et l'écart-type est",s)
      print("Saisissez à nouveau ces valeurs")
      compteur_intervalle=0
      for i in range(1,n+1) :
            x=float(input("Nouvelle valeur ?"))
            if x<=m+2*s and x>=m-2*s:
                  compteur_intervalle=compteur_intervalle+1
      print("Proportion de valeurs dans l'intervalle en % :",compteur_intervalle*100/n)
```

3 Des applis et des traceurs

• **Durée estimée :** 30 min

• **Objectif :** Utiliser les résultats d'un article de recherche en y mobilisant les notions statistiques vues dans le chapitre. Le contexte est par ailleurs un contexte de la vie courante afin de susciter un enjeu et éventuellement une discussion en classe.

▶ A. Compréhension du graphique

1. a) C'est le premier segment vert qui donne cette information : on comprend donc qu'un segment dont mes abscisses des bornes sont les entiers k et $k+1$ et dont l'ordonnée est y veut dire qu'il y a y des applis (gratuites dans ce cas) qui ont k traceur(s) ou moins.

b) L'axe des abscisses désigne le nombre de traceurs et l'axe des ordonnées la proportion d'applications, en %.

2. Il s'agit de regarder l'ordonnée du segment vert dont les bornes ont pour abscisses 3 et 4.
On trouve environ 49 %.

3. « Proportion d'applis (gratuite ou payante) en fonction du nombre de traceurs » (on peut éventuellement dire « proportion cumulée » pour gagner en précision.

4. a) Un peu moins de 65 % des applis gratuites ont 5 traceurs ou moins.

b) Environ 85 % des applis gratuites ont 12 traceurs ou moins.

c) Un peu moins de 35 % des applis payantes ont 0 traceur.

d) Environ 97 % des applis payantes ont 7 traceurs ou moins.

▶ B. Analyse des résultats

1. Environ 23 % des applis gratuites ont 1 traceur ou moins et environ 37 % ont 2 traceurs ou moins donc $Q_1=2$.

Environ 49 % des applis gratuites ont 3 traceurs ou moins et environ 59 % ont 4 traceurs ou moins donc médiane $=4$.

On lit directement que 75 % des applis gratuites ont 8 traceurs ou moins donc $Q_3=8$.

Remarque : pour Q_3, ce n'est pas tout à fait clair avec la précision permise par le graphique, il est possible que $Q_3=9$.

2. De même, pour les jeux payants $Q_1=0$, médiane $=1$ et $Q_3=2$.

3. Tous les indicateurs montrent qu'il y a globalement plus de traceurs dans les applis gratuites.

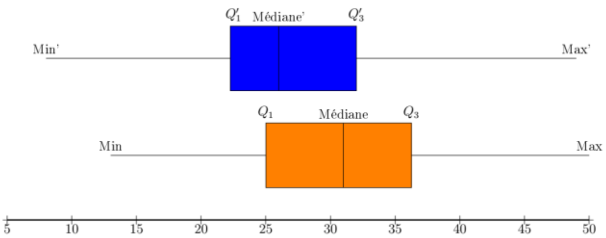
4. Le fait que, pour des segments de même abscisse, les segments rouges sont systématiquement au-dessus des segments verts aurait permis d'anticiper cela.
5. D'après le graphique, il y a environ 92 % des applis gratuites qui ont 16 traceurs ou moins. Cela veut donc dire qu'il y a environ 8 % des applis gratuites qui ont plus de 16 traceurs.

4 Trouver le meilleur joueur

• **Durée estimée :** 45 min
• **Objectif :** Mobiliser les notions de médiane et quartiles pour tracer des diagrammes en boîte et les utiliser dans le cadre de la comparaison de séries statistiques.

▶ A. Comparaison des points marqués

2. a) Au minimum : 13 points, au maximum : 50 points.
b) 68
c) $Q_1 = 25$ (17e valeur), médiane $= 31$ (moyenne des 34e et 35e valeurs) et $Q_3 = 36$.
3. a) C'est le minimum de la série.
b) **=MAX(B3:B70)**
c) **=QUARTILE(B3:B70;1)**
=MEDIANE(B3:B70) et
=QUARTILE(B3:B70;3)
d) Elles sont, soit identiques, soit très légèrement différentes.
4. **=MIN(E3:E76)**
=QUARTILE(E3:E76;1)
=MEDIANE(E3:E76)
=QUARTILE(E3:E76;3) et **=MAX(E3:E76)**.
On obtient 8 ; $22{,}25$; 26 ; 32 et 49.
5. a)



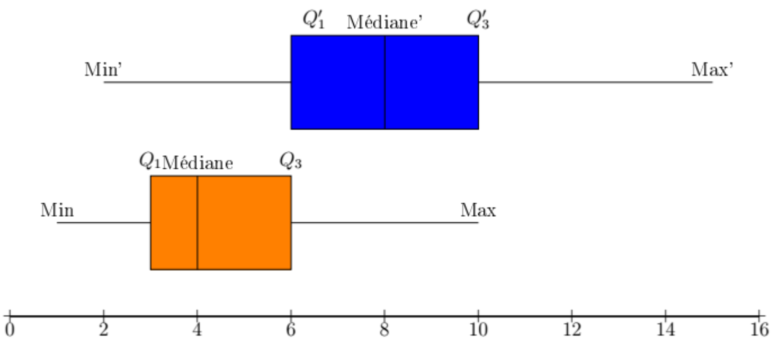
b) C'est Joël Embiid. Cela se manifeste par le fait que le diagramme en boîte correspondant à ses points par matche est décalé vers la droite par rapport à celui de Nikola Jokic.

▶ B. Rebonds et passes décisives

1. a) Pour les passes décisives, on obtient :

	Joël Embiid	Nikola Jokic
Minimum	1	2
Q_1	3	6
Médiane	4	8
Q_3	6	10
Maximum	10	15

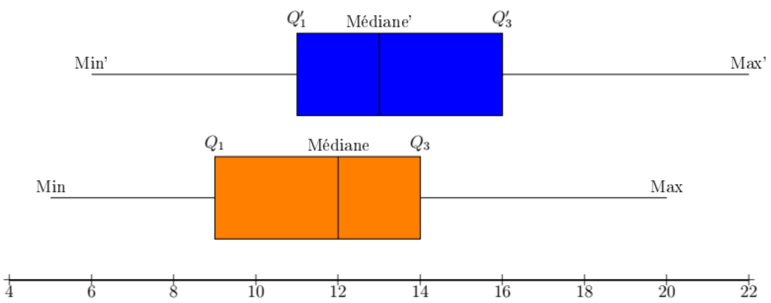
Ce qui donne :



b) Pour les rebonds, on obtient :

	Joël Embiid	Nikola Jokic
Minimum	5	6
Q_1	9	11
Médiane	12	13
Q_3	14	16
Maximum	20	22

Ce qui donne :



2. On voit que dans les deux autres catégories, Nikola Jokic a obtenu de meilleures statistiques qu'Embiid, voire bien meilleures pour les passes décisives donc on peut penser que Nikola Jokic a été élu MVP, ce qui est le cas.

3. On a, arrondi à 0,1 près :

	Points	Passes décisives	Rebond
Moyenne Joël Embiid	30,6	4,2	11,7
Moyenne Nikola Jokic	27,1	7,9	13,8

Ce qui confirme que Jokic a globalement marqué moins de points mais fait plus de passes décisives et pris plus de rebonds

.

Chapitre 13 Probabilités et échantillonnage

↪Manuel p.340-379

Commentaires pédagogiques

Les élèves se sont familiarisés avec des notions élémentaires de probabilités au collège. La partie probabilités de ce chapitre s'attache à définir un cadre plus rigoureux pour l'exercice des probabilités à travers des questionnements sur la notion de modélisation d'une expérience aléatoire par une loi. Une distinction est clairement faite entre ce que représente un modèle posé sur la réalité et celle-ci, qu'il prétend traduire. Des arbres ou des tableaux à double entrée permettent de traiter des cas d'équiprobabilités. Les opérations sur les événements (réunion, intersection d'événements, contraire d'un événement) sont introduites. De ces définitions découlent des propriétés reliant les probabilités. Elles sont, de plus, le prétexte à travailler la logique, le raisonnement. Le travail sur la notion d'échantillonnage, avec une version vulgarisée de la loi des grands nombres, permet de justifier la démarche de modélisation à partir de fréquences observées ou d'estimation de paramètres inconnus. Ce chapitre est propice à la réalisation de nombreuses simulations, utilisant notamment Python.
Les capacités mises en jeu dans ce chapitre sont :
• Comprendre le principe de la fluctuation d'échantillonnage et de l'influence de la taille des échantillons considérés.
• Savoir simuler une expérience aléatoire à deux issues (ou plus précisément, simuler un événement et son contraire), puis un échantillon associé à une telle expérience aléatoire. En particulier, comprendre et savoir écrire un programme ou un algorithme renvoyant ou affichant l'effectif ou la fréquence d'une issue dans un échantillon.

Corrigés des activités et des exercices

Pour prendre un bon départ p. 341

1 Calculer des fréquences

1. et **2.** Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant.

Couleur	Jaune	Blanc	Rouge	Bleu	Vert	Noir
Fréquence	0,02	0,56	0,03	0,01	0,06	0,31
Fréquence (en %)	2 %	56 %	3 %	1 %	6 %	31 %

2 Calculer des pourcentages

1. $\frac{53}{87} \approx 60{,}9\ \%$

2. $\frac{22}{34}$

3 Calculer des effectifs

1. $830\,700 \times \frac{87{,}5}{100} \approx 726\,863$ candidats.

2. $830\,700 \times \frac{9}{10} = 747\,630$ candidats.

4 Dénombrer

1. Il y a $10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1000$ codes possibles.

2. Il y a $26 \times 10^4 = 260\,000$ codes possibles.

5 Calculer des probabilités

1. La probabilité que la piste empruntée soit rouge est de $\frac{2}{5}$.

2. La probabilité que Guilhem emprunte une piste bleue est de $\frac{1}{7}$.

Activités p. 342-343

1 Modéliser une loi de probabilité

• **Durée estimée :** 20 min
• **Objectif** : Découvrir différents modèles d'expériences aléatoires et la notion de loi de probabilité associée.

▶ A. Modèles implicites

1. Pour chaque face il y a la même probabilité: $\frac{1}{6}$.

2.

Issue	Vert	Jaune
Probabilité	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$

3. a)

Issue	0 €	5 €	10 €	20 €
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

b)

Issue	Bleu	Rouge
Probabilité	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$

4.

Issue	Potager	Allée	Pelouse
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

▶B. Modèles statistiques

1. a) Les issues sont : O, A, B, AB.
b) $p(\text{O})=0{,}42$, $p(\text{A})=0{,}44$, $p(\text{B})=0{,}1$ et $p(\text{AB})=0{,}04$.
2. a) Les issues sont :
• A : « le clou a un défaut » ,
• B : « le clou est en bon état ».
b) $p(\text{A})=0{,}05$ et $p(\text{B})=0{,}95$.

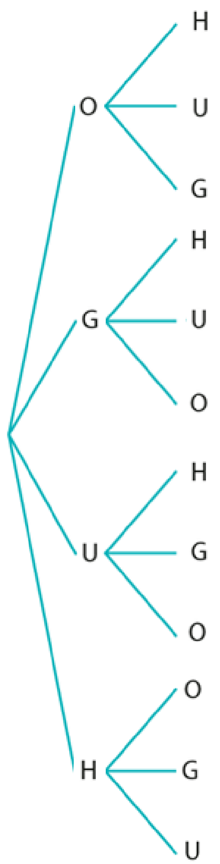
3.

Issue	SI	Latin	PFEG	Italien	Rien
Probabilité	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

2 Utiliser un arbre de dénombrement

• **Durée estimée :** 15 min
• **Objectif :** Utiliser des arbres pour dénombrer des expériences aléatoires à plusieurs étapes.

1. a)



b) Il y a douze issues.
$\{HU; HO; HG; UO; UG; UH; GU; GO; GH; OG; OU; OH\}$

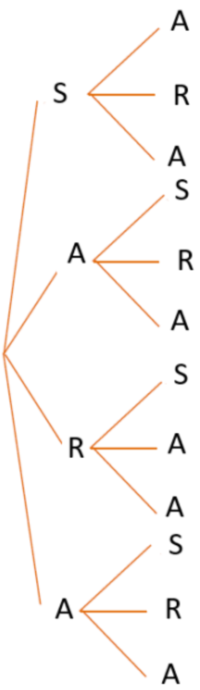
2.a) $C=\{HG; GH\}$

b) $p(C)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

3. $B=\{HU; HO; GU; GO; GH; OU\}$

$p(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

4.



Cette expérience a sept issues différentes : $\{SA; SR; AS; AR; AA; RS; RA\}$

$p(C) = \frac{2}{7}$ et $p(D) = \frac{4}{7}$

5. $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ anagrammes pour Hugo et 12 anagrammes pour Sara.

3 Langage des événements

• **Durée estimée :** 10 min

• **Objectif :** Introduire les opérations sur les événements.

Attention : dans l'énoncé la somme des probabilités doit être égale à 1. Il faut donc lire 0,07 au lieu de 0,06 dans la deuxième ligne de l'avant dernière case du tableau

1. a) A = $\{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$

b) $p(A) = 0{,}39$

2. a) B = $\{1; 2; 3; 4; 5\}$

b) $p(B) = 0{,}56$

3. a) $A \cap B = \{2\,;4\}$

b) $A \cap B$: «Le numéro du jeton tiré est un nombre pair inférieur ou égal à 5.»

c) $p(A \cap B) = 0{,}15$.

4. a) $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10\,;12\}$

b) $A \cup B$: «Le numéro du jeton tiré est pair ou inférieur ou égal à 5.»

c) $p(A \cup B) = 0{,}8$.

5. a) $\overline{A} = \{1\,;3\,;5\,;7\,;9\,;11\}$

b) $\overline{A}$: «Le numéro du jeton tiré est impair.»

c) Attention, dans l'énoncé si on lit 0,07 au lieu de 0,06 pour le numéro 11 alors $p(\overline{A}) = 0{,}61$.

6. $A \cap \overline{B}$: « Le numéro du jeton tiré est un nombre pair supérieur à 5. »

$\overline{A} \cup \overline{B}$: « Le numéro du jeton tiré est un nombre impair ou est supérieur à 5. »

4 Simuler une expérience aléatoire

• **Durée estimée :** 20 min

• **Objectif :** Découvrir les commandes Python en lien avec la bibliothèque **`random`** qui permettent d'obtenir des nombres aléatoires.

Découvrir le principe de la simulation d'une expérience aléatoire.

Trouver un critère sur le nombre généré aléatoirement pour que la probabilité que ce critère soit vérifié soit la même que la probabilité d'un événement de l'expérience aléatoire simulée.

1. La commande **`random. random ()`** permet de générer un nombre (réel ou décimal) aléatoire entre `0` et `1`.

> `0` est inclus et `1` exclu formellement. On peut le préciser, mais ça n'a pas vraiment d'importance pour la simulation.

2. Les probabilités sont proportionnelles à l'amplitude (la taille) de l'intervalle associé à l'événement dans $[0\,;1[$.

a) Probabilité que le résultat soit inférieur à 0,5 : 0,5 (amplitude de $[0\,;0{,}5[$: 0,5 et amplitude de $[0\,;1[$: 1.

b) Probabilité que le résultat soit inférieur à 0,25 : 0,25.

c) Probabilité que le résultat soit inférieur à $\frac{1}{5}$: $\frac{1}{5}$.

3. Lorsque l'on lance un dé équilibré à 6 faces, la probabilité d'obtenir 6 est $p = \frac{1}{6}$, c'est-à-dire la même que la probabilité que le résultat de **`random.random()`** soit inférieur à $\frac{1}{6}$.

4. Il suffit d'écrire `1/6` à la place des pointillés.

5.a) • `random.randint(1,4)` simule un entier aléatoire entre 1et 4.

• `random.randint(5,12)` simule un entier aléatoire entre 5et 12.

```
import random
print ( " Le résultat est", random.randint(1,10))
```

b)

6.

```
import random
if random.randint(1,10)>=7 :
   print ( " Le résultat est au moins égal à 7"),
else :
   print ( " Le résultat est inférieur à 7")
```

5 Fluctuation d'échantillonnage et loi des grands nombres

• **Durée estimée :** 30 min

• **Objectif :** Simuler une expérience aléatoire avec un tableur et découvrir la notion de fluctuation d'échantillonnage et la loi des grands nombres.

1. a) $p = 0{,}237$

c) Dans la cellule A1, on a simulé le tirage au sort d'une personne dans la population française en tirant au hasard un nombre décimal entre 0 et 1 et en considérant que si ce nombre est inférieur à 0,237 alors la personne tirée au sort au moins de 20 ans.

2. b) Cela correspond au nombre de personnes de moins de 20 ans dans l'échantillon.

c) Le résultat change mais reste autour de 119.

d) Dans la cellule C2, on saisit **= C1/500**. L'écart s'obtient en faisant la valeur absolue de la différence entre le résultat obtenu dans la case C2 et 0,237.

e) Les écarts sont inférieurs à 0,05 environ.

3. b) Dans la cellule C1 on saisit **= NB.SI(A1:A10000;"MOINS DE 20")**

Dans la cellule C2, on saisit **= C1/10000**

d) Les écarts sont inférieurs à 0,01 environ. Il y a donc moins d'écart entre *p* et *f* lorsque l'échantillon est plus grand.

6 Estimer un paramètre

• **Durée estimée :** 20 min

• **Objectif :** Découvrir le principe de l'estimation d'un paramètre à partir d'échantillons (partie A). Se tester sur ce type d'estimation (partie B).

▶ A. Principe de l'estimation

1.

```
import random
effectif = 0
for i in range (1,1001):
     if random. random()<0.48:
         effectif = effectif +1
print ( effectif, " foyers reliés à la fibre optique. "),
print ( " Fréquence dans l'échantillon :", effectif/ 1000 )
```

2. a) Dans l'échantillon n°80 : 0,465.

Dans l'échantillon n°20 : 0,490

b) 0,48

c) Cette valeur correspond à la proportion de foyers reliés à la fibre optique.

▶ B. Estimation d'une proportion *p*

1. Proportion de gauchers : 0,13.

Exercices résolus

À vous de jouer !

p. 347

1

Issue	Pique	Cœur	Carreau	Trèfle
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

2

Issue	A-B	C-D-E	F-G
Probabilité	0,067	0,766	0,167

3

Issue	Bleu	Rouge
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

4 La probabilité est $0{,}2+0{,}3+0{,}1=0{,}6$

5 La probabilité est $0{,}35+0{,}2=0{,}55$.

6 $p(7\leqslant n°\leqslant 11)=\frac{5}{23}$

7 La probabilité d'obtenir une voyelle est $\frac{6}{26}=\frac{3}{13}$.

8 La probabilité d'obtenir un as est $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$.

9 1. **a)** $p(J)=\frac{12+22}{15+12+20+22}=\frac{34}{69}$

b) $p(T)=\frac{20+22}{15+12+20+22}=\frac{42}{69}=\frac{14}{23}$

c) $p(\overline{J})=\frac{15+20}{15+12+20+22}=\frac{35}{69}$

d) $p(\overline{T})=\frac{15+12}{15+12+20+22}=\frac{17}{69}=\frac{9}{23}$

2. $p(T\cap J)$ est la probabilité que la fleur proposée soit une tulipe jaune.

$p(T\cap J)=\frac{22}{15+12+20+22}=\frac{22}{69}$.

$p(T\cup J)$ est la probabilité que la fleur proposée soit une tulipe ou une fleur jaune.

$p(T\cup J)=\frac{20+22+12}{15+12+20+22}=\frac{54}{69}=\frac{18}{23}$.

10 1. $p(F)=\frac{85}{180}=\frac{17}{36}$

$p(S)=\frac{43}{180}$

$p(\overline{F})=1-\frac{17}{36}=\frac{19}{36}$

$p(\overline{R})=1-p(R)=1-\frac{56}{180}=\frac{31}{45}$.

2. $F\cap S$: La personne est une femme qui danse le swing.

$p(F\cap S)=\frac{26}{180}=\frac{13}{90}$.

$F\cup S$: La personne est une femme ou une personne qui danse le swing.

$p(F\cup S)=\frac{102}{180}=\frac{17}{30}$

11

×	**–2**	**–1**	**1**	**10**
–2	4	2	–2	–20
–1	2	1	–1	–10
1	–2	–1	1	10
10	–20	–10	10	100

$p(S>2)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

12 On note les événements suivants
- A : « Les deux boules portent le même numéro »
- C : « Les deux boules sont de la même couleur »

Urne 2 / Urne 1	B1	B2	J1	R2	N1
B1	A-C	C	A		A
B2	C	A-C		A	
J1	A		A-C		A
R2		A		A-C	

1. $p(A)=\frac{10}{20}=0{,}5$.

2. $p(\overline{C})=1-p(C)=1-\frac{6}{20}=\frac{7}{10}=0{,}7$.

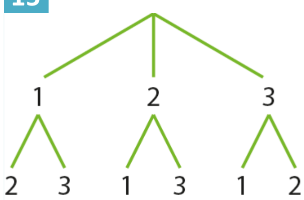
13 La probabilité qu'ils soient compatibles est égale à : $\frac{11}{30}$.

Couvercle / Récipient	AB	AB	CD	CD	CD	E
A	X	X				
B	X	X				
C			X	X	X	
D			X	X	X	
E						X

14 La probabilité qu'elles sortent le même objet est : $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$.

Iris / Lina	Stylo	Stylo	Crayon	Crayon	Feutre	Feutre
Stylo	X	X				
Stylo	X	X				
Stylo	X	X				
Crayon			X	X		
Feutre					X	X

15



$B=\{1 \text{ puis } 2; 1 \text{ puis } 3; 2 \text{ puis } 3\}$

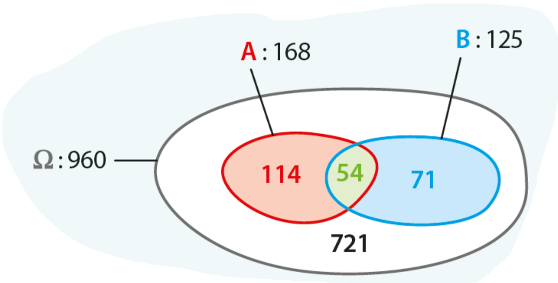
$p(B)=\frac{3}{6}=0,5$.

16 On considère l'évènement C : « Le couple n'a eu aucune fille ». La probabilité d'avoir au moins une fille est donc $p(\overline{C})=1-p(C)$.

L'arbre donne 16 « familles » possibles dont 1 seule n'a aucune fille.

Donc $p(\overline{C})=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$.

17



La probabilité que ce ne soit ni un livre de sciences ni un manuel scolaire est égale à $\frac{721}{960}\approx 0,75$.

18 On considère les événements :

- A : « La personne a déjà marché »
- B : « La personne a déjà campé »

$p(A\cup B)=1-\frac{4}{20}=\frac{16}{20}$.

$p(A\cap B)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)$

$p(A\cap B)=\frac{13}{20}+\frac{8}{20}-\frac{16}{20}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.

La probabilité qu'il ait déjà pratiqué la marche et le camping est $\frac{1}{4}$.

19

```
import random
effectif =0
for i in range (1,501):
    if random.random()<100/205:
      effectif=effectif+1
print(effectif/500)
```

20

```
import random
effectif=0
for i in range (1,900):
    if random.random()<1/2:
      print("Le résultat est pair")
    else:
      print("Le résultat est impair")
      effectif=effectif+1
print(effectif)
```

21 D'après le graphique, la probabilité que la pièce tombe sur *Pile* est d'environ 0,45.

22 La probabilité qu'un enfant de 6 ans croie à *Santa Claus* est environ égale à 0,65.

Exercices résolution de problèmes

p. 358

23 À la boulangerie

Pour établir la liste des issues possibles il faut utiliser un arbre ou un tableau. Les deux sont ici possibles mais le tableau semble plus adapté car il permet de calculer la somme obtenue à chaque issue.

Poche droite / Poche gauche	1 €	0,50 €	0,20 €	0,20 €
0,50 €	1,50	1	0,70	0,70
0,50 €	1,50	1	0,70	0,70
0,20 €	1,20	0,70	0,40	0,40

On peut rédiger la réponse ainsi.
Au total on dénombre 12 issues et parmi elles il y en a 5 qui donnent une somme supérieure ou égale à 0,90. Ainsi, la probabilité que les deux pièces suffisent à acheter la baguette est $\frac{5}{12}$.

24 Soirée jeux

Pour établir la liste des issues possibles il faut utiliser un arbre ou un tableau. Les deux sont ici possibles mais le tableau semble plus adapté car il permet de calculer le produit obtenu à chaque issue.

Nain Jaune / Jeu de l'Oie	1er	2^{e}	3^{e}	4^{e}	5^{e}
1er	1	2	3	4	5
2^{e}	2	**4**	6	8	10
3^{e}	3	6	9	12	15
4^{e}	4	8	12	16	20
5^{e}	5	10	15	20	25

On peut rédiger la réponse ainsi.
Sachant qu'un joueur est arrivé 2^{e} à chaque jeu, il ne reste donc que 16 issues possibles (cases non grisées) pour les autres joueurs. Parmi celle**s-ci il y en a 5 qui donnent un résultat inférieur ou égal** à 4.
La probabilité qu'il soit premier (ou premier ex-aequo) est égale à $\frac{5}{16}$.

25 La playlists des favoris

Pour établir la liste des issues possibles il faut utiliser un arbre ou un tableau. Les deux sont ici possibles mais l'arbre est un peu trop grand. (Réflexe 1)

2^{e} titre / 1er titre	Pop1	Pop2	Pop3	Pop4	Rap1	Rap2
Pop1	X					
Pop2		X				
Pop3			X			
Pop4				X		
Rap1					X	
Rap2						X

On peut rédiger la réponse ainsi.
Au total on dénombre 30 issues (toutes les cases sans croix) et parmi elles il y en a 2 (en grisé) qui correspondent à la question. Ainsi, la probabilité que les deux premières chansons soient du rap est $\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$.

Exercices automatismes

p. 359

Rituel 1

26 0,82

27 0,8

28 **a)**0,8
b)0,25
c)0,3

29 Son résultat n'est pas plausible car exprimé en années. L'espérance de vie du koala ne serait que de 1,6 mois ce qui est trop peu.

30 Cela dépend si l'on calcule la distance parcourue sur le globe (demi-cercle) ou la distance parcourue pôle à pôle(diamètre) Le résultat de Milla est correct si elle considère la distance parcourue sur le globe terrestre entre les deux pôles (distance sphérique) cela représente $\frac{40\,000}{2}=20\,000=2\times10^{4}$ km.

Rituel 2

31 $A=\frac{3}{2}$

32 $B=-\frac{1}{10}$

33 $\mathcal{S}=\{-4\}$

34 $C = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$.

35 $\frac{500}{3}\pi \approx 523{,}6\,\text{cm}^3$

Rituel 3

36 25%

37 65

38 **a)** $\frac{2}{5}$ **b)** $\frac{3}{10}$ **c)** $\frac{3}{2}$

39 **a)** 0,29 **b)** 0,98 **c)** 0,35 **d)** 0,12

40 6×10^{-5}

41 $\mathcal{S} = \{2\}$

42 $\mathcal{S} = \left\{-\frac{17}{5}\right\}$

Rituel 4

43 5

44 0,837

45 Oui : un milliard de bactéries mesurent $0{,}4 \times 10^3$ mètres soit environ 400 m ce qui est comparable à la hauteur de la tour Eiffel.

46 144 €

47 1 000 personnes

Exercices d'entraînement

p. 360-369

Je consolide mes acquis

48 **Fréquence**

La fréquence d'apparition du 4 est $\frac{1}{5}$.

49 **Événement**

a) $p(\text{A}) = 0$.

b) A est un événement impossible.

50 **Probabilité**

a) La probabilité d'obtenir une bille rouge est $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

b) La probabilité de ne pas tirer une bille noire est égale à $1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$.

51 **Proportion et probabilité**

a) $p(\text{A}) = 0{,}1$, $p(\text{B}) = 0{,}15$, $p(\text{C}) = \frac{5}{40} = 0{,}125$

$p(\text{A}) < p(\text{C}) < p(\text{B})$.

Donc c'est dans la boîte B qu'on a le plus de chances d'obtenir un jeton noir.

b) $\frac{100 \times 18}{15} = 120$ jetons noirs.

c) $\frac{6}{48} = \frac{1}{8}$ .Donc il faudrait qu'il y ait 48 jetons au total dans la boîte, dont 6 sont noirs. Il faudrait donc 42 jetons blancs. Il faut donc ajouter 7 jetons blancs.

52 **Scratch**

Ce programme donne le nombre minimum de lancers qu'il faut effectuer avant d'obtenir 6.

Questions de cours

53 La loi de probabilité d'une expérience aléatoire est l'attribution d'une probabilité (un nombre compris entre 0 et 1) à chacune des issues de l'expérience aléatoire de sorte que la somme des probabilités des issues soit égale à 1. On peut la présenter sous la forme d'un tableau.

54 Une loi est dite équirépartie sur univers Ω lorsque chaque issue a la même probabilité de se réaliser, qui est alors égale à $\frac{1}{n}$.

55 Un événement est un sous-ensemble de l'univers. Il peut s'écrire comme un ensemble d'issues ou être décrit à l'aide d'une phrase.

56 L'événement contraire de A, noté $\overline{\text{A}}$, est l'ensemble des issues qui ne réalisent pas A, autrement dit $\overline{\text{A}}$ est réalisé par les issues de Ω qui ne sont pas dans A.

57 $p(\bar{A})=1-p(A)$.

58 $p(A)+p(B)=p(A\cup B)+p(A\cap B)$.

59 **random()** sur la calculatrice,
ALEA() sur le tableur,
`random.random()` en langagePython

60 On calcule la fréquence de cet événement dans plusieurs échantillons de taille suffisamment grande, puis on estime la probabilité de cet événement en prenant la valeur autour de laquelle se répartissent ces fréquences.

Modéliser une expérience aléatoire

61 **1. a)** $\Omega=\{2;4;6;8;10;12;14\}$

b) Cet univers est constitué de 7 issues.

2. $\Omega=\{6;12;18;24;30\}$

5 issues composent cet univers.

62

$\Omega=\{\text{marche;vélo;train;bus;voiture;scooter}\}$

63 **1.** $\Omega=\{0;1;2;3;4;5\}$

2. Il y a 6 issues.

64

Issue	Manches courtes	Manches longues
Probabilité	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

65 Si on considère que le dé est bien équilibré, alors il s'agit de la loi équirépartie.

La probabilité de chaque issue est $\frac{1}{20}=0{,}05$.

66 **a)** C'est la loi équirépartie. La probabilité de chaque issue est 0,1.

b)

Issue	Noir	Rouge	Vert
Probabilité	0,1	0,5	0,4

c)

Issue	Mat	Brillant
Probabilité	0,1	0,9

67

Issue	16	17	18	19	20
Probabilité	0,005	0,39	0,53	0,065	0,01

68

Issue	Guitare	Batterie	Piano	Clarinette
Probabilité	$\frac{19}{69}$	$\frac{15}{69}=\frac{5}{23}$	$\frac{21}{69}=\frac{7}{23}$	$\frac{14}{69}$

69

Issue	Enseignant	Agent administratif	Agent d'entretien
Probabilité	0,6	0,3	0,1

70

Issue	Vert	Orange	Rouge
Probabilité	$\frac{45}{70}=\frac{9}{14}$	$\frac{5}{70}=\frac{1}{14}$	$\frac{20}{70}=\frac{2}{7}$

71 **a)** On lance un dé tétraédrique régulier à 4 faces, dont l'une est noire, une autre bleue, la troisième est rouge et la dernière est jaune.
b) Dans une penderie sont accrochés 7 chemises, 10 tee-shirts et 3 polos. On ouvre la penderie et on choisit au hasard un vêtement.

72 **1.** L'univers est $\Omega=\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$.

2. Il y a 6 issues.

3. Non.

73 Par exemple :
- On observe la somme des deux dés.
- On observe le produit des deux dés.
- On observe le quotient du plus petit nombre par le plus grand.
- On observe l'écart entre les deux résultats obtenus.
- On observe le plus grand des deux résultats obtenus.

74

a) $t=0{,}2$.

b) $21t=1\Leftrightarrow t=\frac{1}{21}$.

Probabilité d'un événement dans le cas général

75 $p(A)=0{,}1+0{,}1+0{,}25=0{,}45$

$p(B)=0{,}25+0{,}2=0{,}45$.

76 $p(\mathrm{A})=0{,}03+0{,}05+0{,}21=0{,}29$.
$p(\mathrm{B})=0{,}03+0{,}05=0{,}08$.
$p(\mathrm{C})=0{,}03+0{,}06+0{,}05=0{,}14$.

77 **1.** La probabilité est $0{,}05+0{,}395=0{,}445$
.
2. La probabilité est $0{,}055$.

78 **1.** La probabilité est $0{,}02$.
2. La probabilité est $0{,}05+0{,}15+0{,}28=0{,}48$.

79 La probabilité est
$0{,}51+0{,}19+0{,}06=0{,}76$.

80 **Modéliser une situation**
1. La probabilité est la même pour chacune des faces autre que 6, appelons-là x.
On a alors la loi de probabilité suivante :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	x	x	x	x	x	$3x$

$x+x+x+x+x+3x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{8}$.
2. La probabilité que le résultat soit pair est
$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$.

81 $t^2+t+\frac{1}{4}=1$
$\Leftrightarrow \left(t+\frac{1}{2}\right)^2=1 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$.

Probabilité d'un événement dans le cas d'une loi équirépartie

82 **1.** La probabilité d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 7 est : $\frac{3}{4}$.
2. La probabilité d'obtenir un nombre premier est : $\frac{3}{4}$.

83 **1.** La probabilité qu'il obtienne une voyelle est : $\frac{2}{5}$.
2. La probabilité qu'il obtienne une lettre du mot fourmi est : $\frac{3}{5}$.

84 La probabilité que la carte soit :
a) l'as de pique est : $\frac{1}{52}$.
b) un pique est : $\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$.
c) une figure est : $\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$.

85 **1.** $p(\{12\})=\frac{1}{12}$
2. $p(\{2;3;5;7;11\})=\frac{5}{12}$.
3. $p(\{3;6;9\})=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

86 $p(\mathrm{A})=\frac{18}{37}$, $p(\mathrm{B})=\frac{18}{37}$, $p(\mathrm{C})=\frac{1}{37}$.

87 **1.** La probabilité est $\frac{230}{1\,245}=\frac{46}{249}$.
2. La probabilité est $\frac{385}{1\,245}=\frac{77}{249}$.
3. La probabilité est $\frac{905}{1\,245}=\frac{181}{249}$.

88 **1.** La probabilité qu'il interviewe :
a) un Allemand médaillé d'argent est de: $\frac{10}{79}$.
b) un médaillé d'or est de : $\frac{37}{79}$.
c) un Chinois est de : $\frac{15}{79}$.
d) un Chinois ou un médaillé de bronze est de: $\frac{33}{79}$.
2. La probabilité est : $\frac{18}{64}=\frac{9}{32}$.
3. La probabilité est : $\frac{16}{37}$.

89 **1.** La probabilité est : $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.
2. La probabilité est : $\frac{5}{36}$.

Intersections, réunions et événements contraires

90 L'événement contraire est :« Lenny a répondu juste à une question au plus. »

91 $\overline{C}$: « La pièce est noire et n'est pas une tour »

92 **a)** $\overline{A}$: « Il ne porte pas de lunettes. »
b) $A \cap B$: « Il porte des lunettes et n'a aucun stylo. »
c) $A \cup B$: « Il porte des lunettes ou il n'a aucun stylo. »
d) $\overline{B}$: « Il a au moins un stylo. »

93 **1.** • $\overline{A}$: « Le résultat du dé est impair. »
• B : « Le résultat du dé est inférieur ou égal à 4. »
• $\overline{C}$ « Le résultat du dé est 1, 2 ou 4. »
2. a) $A \cap B$: « Le résultat du dé est 6. »
b) $\overline{A} \cap C$: « Le résultat du dé est 3 ou 5. »
c) $\overline{A \cup C}$: « Le résultat du dé est 2 ou 4. »

94 **a)** $G \cap R$
b) $R \cap \overline{G}$
c) $R \cup G$
d) $\overline{R} \cap \overline{G}$

Opérations sur les événements et calcul de probabilités

95 $p(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$.

96 $p(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}8$.

97 $p(B) = \frac{13}{14} + \frac{3}{14} - \frac{5}{7} = \frac{3}{7}$.

98 **a)** $p(\overline{A}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.
b) $p(\overline{B}) = 1 - 0{,}22 = 0{,}78$.
c) $p(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}22 = 0{,}62$.

99 $p(C \cup D) = 1{,}3 > 1$. Donc les événements C et D ne sont pas incompatibles.

100 **a)** $p(S \cap T) = 0{,}5 + 0{,}6 - 0{,}9 = 0{,}2$.
b) $p(\overline{S \cup T}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.
c) $p(\overline{S \cap T}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

101 La probabilité que Robin de Bois rate sa cible est 0,01.

102
1. a) $A \cap B$: « Le nombre obtenu est premier et inférieur ou égal à 4. »
b) $A \cup B$: « Le nombre obtenu est premier ou inférieur ou égal à 4. »
c) $\overline{A} \cap B$: « Le nombre obtenu n'est pas premier et est inférieur ou égal à 4. »
d) $A \cup \overline{B}$: « Le nombre obtenu est premier ou est supérieur à 4. »

2. a) • $A \cap B = \{2\,;3\}$: 2 issues
• $A \cup B = \{1\,;2\,;3\,;4\}$: 4 issues
• $\overline{A} \cap B = \{1\,;4\}$: 2 issues
• $A \cup \overline{B} = \{2\,;3\,;5\,;6\,;7\,;8\}$: 6 issues
b) $p(A \cap B) = \frac{2}{8} = 0{,}25$.
$p(A \cup B) = \frac{4}{8} = 0{,}5$.
$p(\overline{A} \cap B) = \frac{2}{8} = 0{,}25$.
$p(A \cup \overline{B}) = \frac{6}{8} = 0{,}75$.

103 **1. a)** •$R \cap E$: « Le livre choisi est un roman emprunté. »
•$R \cup E$: « Le livre choisi est un roman ou un livre emprunté.»
b) $p(R \cap E) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
$p(R \cup E) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
2.a) $\overline{R}$: « Le livre choisi n'est pas un roman. »
b)($p(\overline{R})$) = $\frac{7}{12}$.

104
1.

Issue	Aucun défaut	Deux défauts	Uniquement un défaut clavier	Uniquement un défaut écran
Probabilité	0,971	0,015	0,009	0,005

2. $p(E) = 0{,}02$, $p(C) = 0{,}024$, $p(E \cap C) = 0{,}015$

3. a) Le premier se traduit par $E \cup C$, le second par $E \cap \bar{C}$.

b) $p(E \cup C) = 0{,}029$ et $p(E \cap \bar{C}) = 0{,}005$.

105 **1.** $p(C) = \frac{250}{500} = 0{,}5$, $p(M) = \frac{225}{500} = 0{,}45$.

2. a) • $\bar{A}$: « Le film n'est pas un film d'action/aventure. »

• $M \cup A$: « Le film dure moins de 2h ou est un film d'action/aventure. »

• $\bar{M} \cap C$: « Le film est une comédie qui dure plus de 2h. »

• $\bar{A} \cap \bar{C}$: « Le film n'est ni un film d'action/aventure ni une comédie ». On peut dire aussi : « Le film est un film policier.»

b) $p(\bar{A}) = 1 - \frac{200}{500} = \frac{300}{500} = 0{,}6$

$$p(M \cup A) = \frac{200 + 150 + 8}{500} = \frac{358}{500} = 0{,}716$$

$$p(\bar{M} \cap C) = \frac{100}{500} = 0{,}2$$

$$p(\bar{A} \cap \bar{C}) = \frac{50}{500} = 0{,}1$$

106 **a)** La probabilité est :

$p(\overline{O_1}) = 1 - p(O_1) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

b) La probabilité est :

$p(O_1 \cup O_2) = p(O_1) + p(O_2) - p(O_1 \cap O_2)$

$= 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}5$.

c) La probabilité est :

$p(\overline{O_1 \cap O_2}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Utiliser un tableau à double entrée

107 **1.**

×	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

2. $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 16\}$.

3.

Issue	1	2	3	4	6	8	9	12	16
Probabilité	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

4. La probabilité d'avoir un nombre supérieur ou égal à 5 est : $\frac{1}{2}$.

108

	Cyan	Magenta	Jaune
Cyan	Cyan	Bleu	Vert
Magenta	Bleu	Magenta	Rouge
Jaune	Vert	Rouge	Jaune

2.

Issue	Cyan	Magenta	Jaune	Bleu	Rouge	Vert
Probabilité	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

109

+	20 €	25 €	32 €	36 €
25 €	45 €	50 €	57 €	61 €
32 €	52 €	57 €	64 €	68 €
40 €	60 €	65 €	72 €	76 €

La probabilité que ça lui coûte (strictement) plus que 60 € est $\frac{1}{2}$.

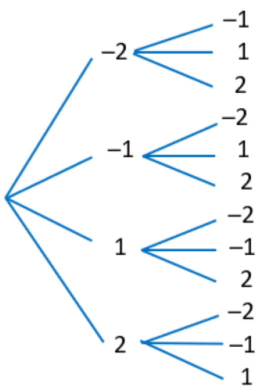
110 Binômes possibles dans la famille Joyeux :

moyenne	38 ans	37 ans	11 ans	8 ans
42 ans	40 ans	39,5 ans	26,5 ans	25 ans
41 ans	39,5 ans	39 ans	26 ans	24,5 ans
15 ans	26,5 ans	26 ans	13 ans	11,5 ans
12 ans	25 ans	24,5 ans	11,5 ans	10 ans

La probabilité que la moyenne du binôme soit comprise entre 24 et 28 ans est $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

Utiliser un arbre

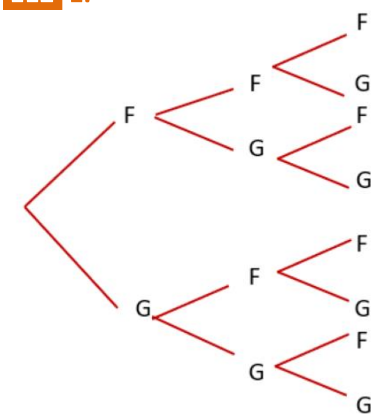
111 **1.**



2. a) La probabilité que la somme des deux nombres soit nulle est : $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

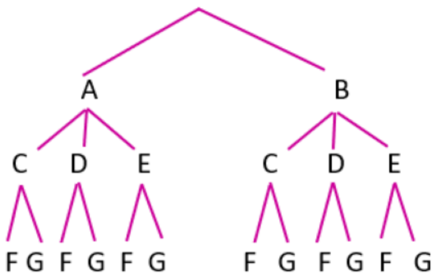
b) La probabilité que la somme des deux nombres soit égale à -3 est : $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

112 **1.**



2. a) La probabilité que les enfants ne soient pas tous du même sexe est : $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

113 **1.**



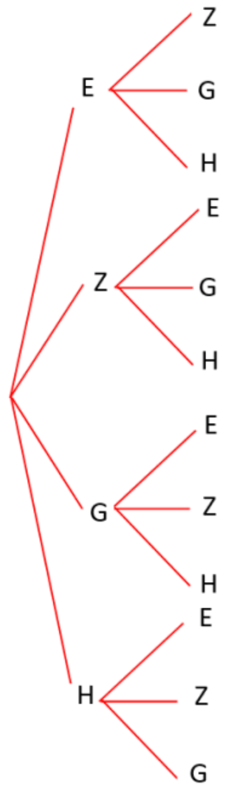
2. Il y a donc 12 menus différents possibles.

3. a) $p(\text{E})=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

b) $p(\text{A}\cap\text{F})=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

c) $p(\overline{\text{D}})=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

114 **1.**



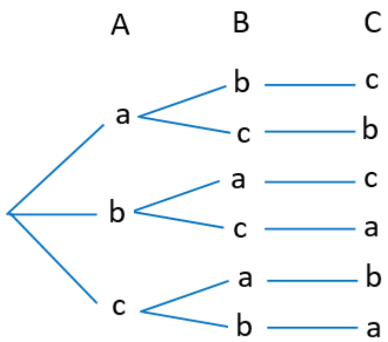
2. a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{3}$

115

1. Six rangements sont possibles.



2. a) $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 0

3. La probabilité est $\frac{1}{3}$.

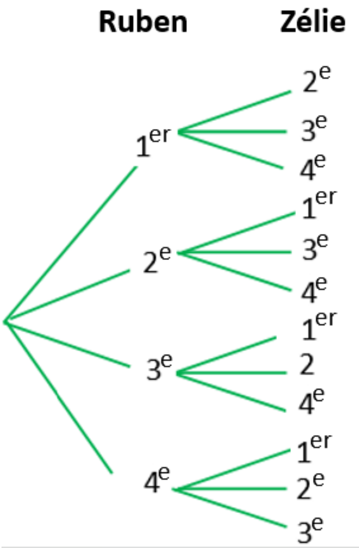
116 **Choisir le bon schéma**

Il faut faire un arbre pour dénombrer les 24 issues de cette expérience aléatoire.

a) La probabilité qu'il obtienne les trois couleurs dans le bon ordre est : $\frac{1}{24}$.

b) La probabilité qu'il obtienne les trois couleurs dans le désordre est : $\frac{5}{24}$

117

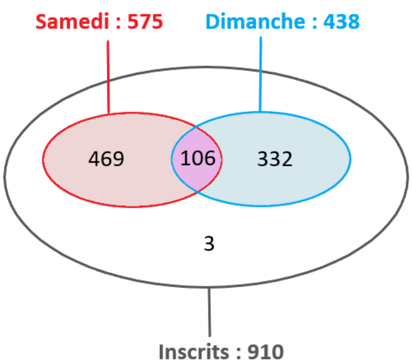


La probabilité est : $\frac{1}{2}$.

118 La probabilité est : $\frac{1}{4}$.

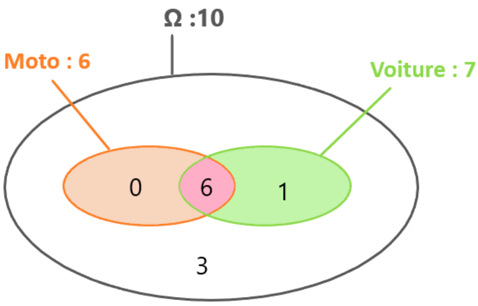
Utiliser un diagramme de Venn

119

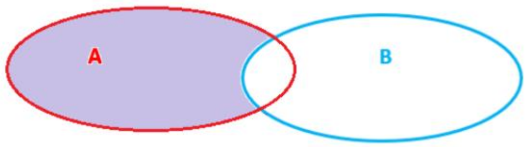


3 personnes ne sont finalement allées à aucun concert.

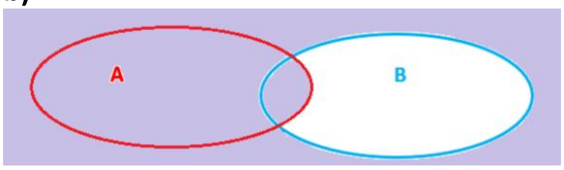
120



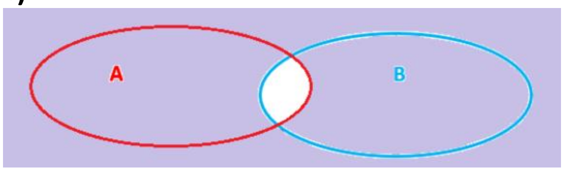
121 **a)**



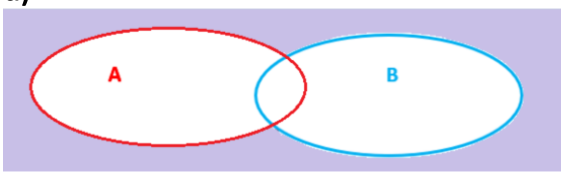
b)



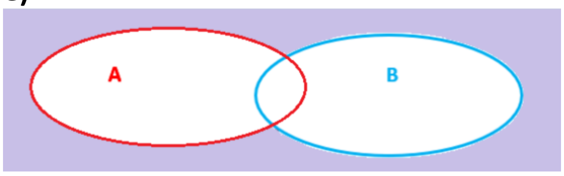
c)



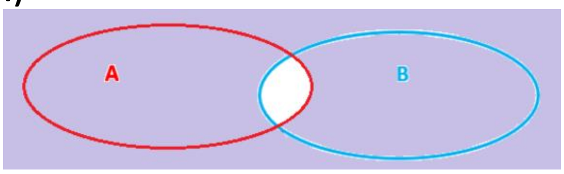
d)



e)



f)



122 **a)**
$p(\bar{A}\cap B)=p(B)-p(A\cap B)=0,5-0,25=0,25$
b) $p(A\cup\bar{B})=1-p(\bar{A}\cap B)=1-0,25=0,75$.

123 Esprit critique
Aïssatou a raison. Ce n'est pas possible car, quels que soient les événements V et F on doit toujours avoir : $p(V)+p(F)\geqslant p(V\cup F)$.

124 Esprit critique
Simon a raison. Ce n'est pas possible car, quels que soient les événements V et F on doit toujours avoir : $p(V\cap F)\leqslant p(F)$ et $p(V\cap F)\leqslant p(V)$.

125 Esprit critique
Zoé a raison. Ce n'est pas possible car, quels que soient les événements V et F on doit toujours avoir : $p(V\cup F)\geqslant p(F)$ et $p(V\cup F)\geqslant p(V)$.

126 **a)** 0,2 **b)** 0,5 **c)** 0,6 **d)** 0,1**e)** 0,4 **f)** 0,9 **g)** 0,4 **h)** 0,9

127 La probabilité qu'elle ne s'habille pas avec des vêtements de seconde main et utilise sa voiture pour se rendre à son travail est : $\frac{110}{250}=0,44$.

Simuler un échantillon associé à une expérience aléatoire

128
```
if random.random()<0.7:
        print("au moins une fois")
else :
        print("n'a jamais joué")
```

129 **1.** =SI(ALEA()<0.35;"obèse";"non obèse")

2. =SI(ALEA()<0.4;"obèse";"non obèse")

130
```
import random
    if random.random()<0.224:
```
```
        print("STS")
    else :
        print("Pas STS")
```

131 **Attention,** dans le programme, il faut lire `random.randint(1,32)`
```
if random.randint(1,32)<=17:
       print("Fille")
else :
       print("Garçon")
```

132 **Attention,** dans le programme, il faut lire `random.randint(1,10)`
```
for i in range(1,31):
    if random.randint(1,10)<=3:
       print("cuir marron")
    else :
       print("pas cuir marron")
```

133 **1.** **a)** La variable `effectif` vaut **4** en fin d'algorithme (elle est incrémentée 4 fois car 0,52 ; 0,89 ; 0,23 et 0,28 sont inférieurs ou égaux à 0,904 mais pas 0,95).
b) Cela correspond au nombre de lancers-francs réussis sur les 5 simulés.
2.
```
effectif=0
for i in range(1,351):
    if random.random()<=0.904:
          effectif=effectif+1
```

134 **1.**
```
for i in range(1,201):
    if random.random()>=0.3:
       print("Non Végétarien")
    else :
       print("Végétarien")
```
2.
```
effectif=0
for i in range(1,201):
    if random.random()>=0.3:
          effectif=effectif+1
print(effectif)
```

135 **1.** **a)**
```
for i in range(1,101):
    if random.random()<0.394:
       print("Université")
    else :
       print("Pas d'université")
```
b)
```
effectif=0
for i in range(1,101):
    if random.random()<0.394:
          effectif=effectif+1
print(effectif)
```

2.

```
effectif=0
for i in range(1,1317):
    if random.random()<0.394:
        effectif=effectif+1
print(effectif)
```

136 Décomposer un problème en sous-problèmes

1.

```
for i in range(1,992):
    if random.random()<0.1:
        print("Pénalty")
    else :
        print("Pas penalty")
```

2.

```
def pen():
    effectif=0
    for i in range(1,992):
        if random.random()<0.1:
            effectif=effectif+1
    return effectif
```

Estimer une probabilité ou une proportion

137 **1.** $p(\{6\}) \approx 0{,}3$

2. Non car $\frac{1}{6} \times 3 = 0{,}5$.

138 **1.** 0,6

2. $p \approx 0{,}62 = 62\%$.

3. Il faudrait augmenter la taille des échantillons.

Modéliser à partir de fréquences

139 **1.** On peut estimer la probabilité $p(\text{V})$ d'obtenir une boule verte à environ 0,49.

2. $p(\text{R}) + p(\text{B}) + p(\text{V}) = 1$.

3.

Issue	Rouge	Bleu	Vert
Probabilité	0,34	0,17	0,49

4. a)

Issue	Rouge	Bleu	Vert
Probabilité	0,33	0,16	0,51

b) Cela illustre le principe de la fluctuation d'échantillonnage.

140 Vérifier un résultat

1. Autour de 11 %.

2. a) D'après la question **1.** :

Issue	Malade	Pas malade
Probabilité	0,11	0,89

b) Non, ce n'est pas la seule, on peut imaginer que les probabilités soient différentes mais probablement peu éloignées de celles obtenues ici.

141 **1.**

Issue	Victoires	Matchs nuls	Défaites
Probabilité	0,06	0,09	0,85

2. Compte-tenu du principe de fluctuation d'échantillonnage la loi proposée par Jalila n'est pas moins pertinente car les fréquences restent suffisamment proches des probabilités choisies.

142

Issue	Vertes	Oranges	Jaunes
Probabilité	0,29	0,33	0,38

« Normalité » d'un échantillon

143 **1.** $f = \frac{45}{46} \approx 0{,}98$, soit environ 98 %.

2. Pas forcément, mais c'est assez nettement supérieur à 87 %.

3. D'après la simulation, on constate que 45 pandas qui survivent ou plus n'est pas très fréquent, 2 sur 100 échantillons dans cette simulation, soit 2 %, donc on peut dire que c'est un cas un peu exceptionnel mais cela ne contredit pas les statistiques.

L'idée n'est pas de répondre fermement à la question, « Est-ce exceptionnel ? cela contredit-il les statistiques ? » car il n'y a pas vraiment de bonne réponse, mais de sensibiliser les élèves au fait qu'il est intéressant de quantifier si un écart de 11 % par rapport à la valeur théorique est fréquent ou non dans le cas d'un échantillon de taille 46.

144 **1.** Il y a 30 % de tickets dorés d'après le graphique donc $400 \times 0{,}3 = 120$.

2. Ici, $n = 400$ donc $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{400}} = 0{,}05$.

Il s'agit donc d'abord de trouver le nombre d'échantillons dans lesquels la fréquence est entre $0{,}25$ et $0{,}35$: il y en a 46 sur 50, soit 92 % d'échantillons où l'écart entre p et f est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3. a) La fréquence minimale de tickets dorés dans un échantillon de 400 barres chocolatées semble être proche de $0{,}23$, ce qui correspond à $400\times0{,}23=92$ tickets dorés, donc oui, normalement, il pourra amener ses 88 amis.

b) Non, pour les mêmes raisons (140 tickets dorés correspondent à $f=0{,}35$, ce qui n'est quasiment jamais atteint).

À chacun son rythme

145 Énoncé A

1.

Issue	Noire	Blanche
Probabilité	0,6	0,4

2. Après avoir retiré 1 boule, le sac contient:

- **1er cas :** 3 boules noires et 1 blanche ;
- **2e cas :** 2 boules noires et 2blanches.

Les 50 tirages effectués donnent :

Issue	Noire	Blanche
Fréquence	0,78	0,22

Ces fréquences sont assez proches de la loi de probabilité qu'on aurait dans le 1er cas. Donc la boule retirée devrait donc être blanche.

Énoncé B

Sac 2 / Sac 1	N	N	B	B	B
N	X	X			
N	X	X			
N	X	X			
B			X	X	X
B			X	X	X

La probabilité qu'elles soient de même couleur est : $\frac{12}{25}=0{,}48$.

Énoncé C

À l'aide d'un arbre on dénombre un total de 30 issues pour cette expérience aléatoire. Parmi elles, il y a 17 issues où les 2 boules ont la même couleur. La probabilité est donc : $\frac{17}{30}$

.

L'énoncé A est expérience aléatoire simple ; l'énoncé B nécessite d'utiliser un tableau pour modéliser et dénombrer les résultats de l'expérience aléatoire ; la situation de l'énoncé C est un peu plus compliquée à modéliser, elle nécessite un arbre de dénombrement qui est assez long à faire.

Exercices de synthèse p. 370

146 Trouver la loi

1. $x+2x+\frac{1}{3}=1 \Leftrightarrow 3x=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=\frac{2}{9}$.

Issue	Jaune	Rouge	Verte
Probabilité	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$

2. $x+x+x+x+x+2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{7}$.

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$

147 Au zoo

1. a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

c) $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

2. $\frac{1}{2}$.

148 Habits divers et d'hiver

1.

Gants / Bonnets	Noir	Noir	Gris	Gris	Bleu
Noir					
Gris					
Bleu					
Bleu					

Il y a 20 issues au total.

2. $0{,}5$.

3. $\frac{8}{20}=0{,}4$.

4. $\frac{6}{20}=0{,}3$.

149 Lancer de dés

1.

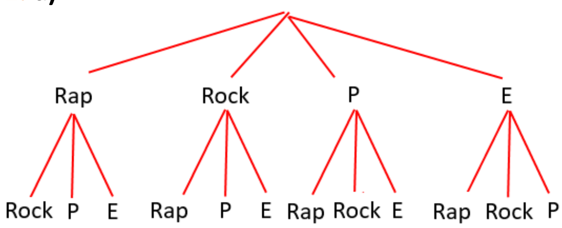
Dé 4 / Dé 6	1	2	3	4
1	11	12	13	14
2	21	22	23	24
3	31	32	33	34
4	41	42	43	44
5	51	52	53	54
6	61	62	63	64

La probabilité d'obtenir un multiple de 3 est : $\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$.

2. Oui cette probabilité est la même car un nombre est multiple de 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est multiple de 3. Donc l'ordre des chiffres ne changera rien.

150 Tirages sans remise

1. a)



b) Il y a 12 issues équiprobables. C'est donc la loi équirépartie.

2. $p(\mathrm{E})=0{,}25$

$p(\mathrm{R})=0{,}5$

$p(\mathrm{D})=\frac{1}{6}$.

3. • $\mathrm{E}\cap\mathrm{R}$: « Le premier disque choisi est de l'électro et le deuxième est du rock ou du rap. » $p(\mathrm{E}\cap\mathrm{R})=\frac{1}{6}$.

• $\mathrm{E}\cup\mathrm{R}$: « Le premier disque choisi est de l'électro ou le deuxième disque est du rock ou du rap. » $p(\mathrm{E}\cup\mathrm{R})=\frac{7}{12}$.

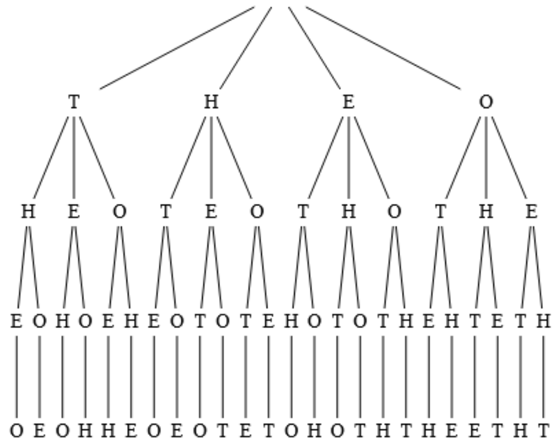
4. a) $\overline{\mathrm{M}}$: « Aucun des disques choisis n'a été produit après 2022. » On a donc : $\overline{\mathrm{M}}=\mathrm{D}$.

b) $p(\mathrm{M})=1-p(\overline{\mathrm{M}})=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

151 En phase d'apprentissage

1. a) 24 **b)** $\frac{1}{24}$ **c)** $\frac{1}{4}$

2. La probabilité est $\frac{1}{6}$.



3. Il peut écrire 3 mots différents ; la probabilité qu'il l'écrive correctement est de $\frac{1}{3}$.

La probabilité que le mot commence par B est de $\frac{2}{3}$ et la probabilité qu'il l'écrive correctement sachant qu'il a commencé par B est de $\frac{1}{2}$.

152 Francophonie

```
import random
def freq_Canada_francophone():
    francophones=0
    for i in range(1,1325):
        if random.random()<0.213:
            francophones=francophones+1
    return francophones/1325
```

153 Tableau croisé d'effectif à compléter

1.

Ados	Kayak	Escalade	Vélo	Total
Filles	23	27	42	92
Garçons	21	17	30	68
Total	44	44	72	160

2. a) $p(\mathrm{E})=\frac{44}{160}=0{,}275$, $p(\mathrm{F})=\frac{92}{160}=0{,}575$, $p(\mathrm{K})=\frac{44}{160}=0{,}275$.

b) • $\overline{\mathrm{F}}\cap\mathrm{K}$: « L'adolescent choisi est un garçon qui s'est inscrit à l'activité kayak. »

• $\mathrm{F}\cap\overline{\mathrm{K}}$: « L'adolescent choisi est une fille qui ne s'est pas inscrite à l'activité kayak. »

• $\overline{\mathrm{F}}\cup\mathrm{E}$: « L'adolescent choisi s'est inscrit à l'activité escalade ou est un garçon. »

• $\overline{K} \cap \overline{E}$: « L'adolescent choisi est inscrit à l'activité vélo ». »
• $F \cup K$: « L'adolescent choisi est une fille ou s'est inscrit à l'activité kayak. »

c) $p\left(\overline{F} \cap K\right) = \dfrac{21}{160}$

$p\left(\overline{K} \cap F\right) = \dfrac{69}{160}$

$p\left(\overline{F} \cup E\right) = \dfrac{95}{160} = \dfrac{19}{32}$

$p\left(\overline{K} \cap \overline{E}\right) = \dfrac{72}{160} = \dfrac{9}{20}$

$p\left(F \cup K\right) = \dfrac{113}{160}$.

3. La probabilité est : $\dfrac{30}{72} = \dfrac{5}{12}$.

154 Triche au casino

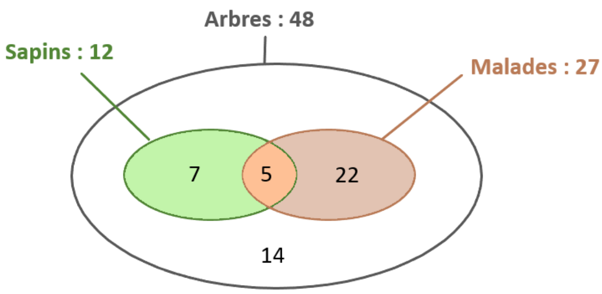
1. $\dfrac{1}{6}$

2. $\dfrac{191}{1000} = 0{,}191$ et $\dfrac{1}{6} \approx 0{,}167$: les deux nombres sont relativement proches mais pas « excessivement ». On ne peut pas vraiment statuer avec ces résultats sur l'équilibre du dé.

3. On constate qu'une fréquence supérieure ou égale à $0{,}191$ est assez rare (mais possible : de l'ordre de 2 % du temps ici) : on peut donc raisonnablement douter de l'équilibre du dé.

Ici, on est dans un cas limite donc toute réponse autre mais correctement argumentée est recevable.

155 Diagramme de Venn



La probabilité que ce soit un sapin en bonne santé est $\dfrac{7}{48}$.

156 Estimation d'une proportion

1.

```
def sav():
    effectif=0
    for i in range(1,525):
        if random.random()<=0.073:
            effectif=effectif+1
    returnfrancophones/524
```

2. Sauf exception, on peut s'attendre à avoir entre 4 % et 11 % de retours en SAV sur un échantillon de 524 téléviseurs de cette marque.

3. a) $\dfrac{63}{524} \approx 0{,}12$ soit un taux de retour d'environ 12 %. D'après la question **2.**, c'est anormalement élevé.

b) $\dfrac{45}{524} \approx 0{,}086$, soit un taux de retour d'environ 8,6 %. D'après la question **2.**, c'est tout à fait normal.

Exercices d'approfondissement

p. 372

157 Joyeux anniversaire !

La probabilité est $\dfrac{1}{1461}$.

158 Lancer de trois dés

Les combinaisons **a)** et **c)** sont les plus probables.

159 Choix de spécialités

1. a) La probabilité est : $\dfrac{16}{38} = \dfrac{8}{19}$.

b) La probabilité est : $\dfrac{9}{38}$.

c) La probabilité est : $\dfrac{21}{38}$.

2. La probabilité est : $\dfrac{5}{19}$.

160 Répétition d'épreuves identiques

1.

```
import random
s=0
    for i in range(1,10000):
        pile=0
```

```
        for j in range(5):
            if random.random()<=0.4:
                pile=pile+1
    if pile>=2
        s=s+1
print (s/10000)
```

2. $p(\text{A}) \approx 0{,}66$.

161 Seniors et loisirs

La probabilité est $\frac{8}{40} = \frac{1}{5}$.

Vers la 1re

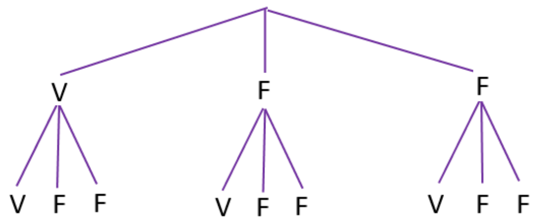
162 Vers STMG-ST2S

$p(\text{A}) = 0{,}35$; $p(\text{B}) = 0{,}75$; $p(\text{A} \cap \text{B}) = 0{,}3$.

$p(\text{A}) \times p(\text{B}) \neq p(\text{A} \cap \text{B})$ donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

163 Vers la spécialité Maths

1. V : Vrai ; F : Faux



2. $X = \{-2;1;4\}$

3.

Issue	-2	1	4
Probabilité	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

4. $E(X) = -2 \times \frac{4}{9} + 1 \times \frac{4}{9} + 4 \times \frac{1}{9} = 0$.

En moyenne l'élève aura 0 point au QCM.

Préparer le contrôle
Je me teste p. 374

Objectif 1 Déterminer une loi et calculer des probabilités simples

164 C **165** B **166** D

Objectif 2 Modéliser des expériences à plusieurs étapes

167 B **168** B

Objectif 3 Utiliser les opérations sur les événements

169 A,B,C et D **170** B et C

Objectif 4 Simuler une expérience et estimer une probabilité ou une proportion

171 B et D

172 B

Préparer le contrôle
Je m'entraîne p. 375

Objectif 1 Déterminer une loi et calculer des probabilités simples

173

1.

Issue	Anglais	Allemand	Chinois	Coréen
Probabilité	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{16}$

2. $p(\text{Asiatique}) = \frac{7}{16} + \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = 0{,}5$.

174 **1.** Loi équirépartie sur l'univers $\Omega = \{A;B;C;D;E\}$.

2.

Issue	1	2	3
Probabilité	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

175 $2t + 0{,}25 + 0{,}15 = 1 \Leftrightarrow t = 0{,}3$

Objectif 2 Modéliser des expériences à plusieurs étapes

176 La probabilité d'obtenir au moins deux fois *Pile* est égale à $\frac{2}{8}$, c'est-à-dire $\frac{1}{4}$ car l'univers est :

$\{PPP;PPF;PFP;PFF;FPP;FPF;FFP;FFF\}$

177 L'univers est constitué de 12 issues équiprobables et parmi elles il y a 4 nombres premiers : 23 ; 37 ; 53 et 73. Donc la probabilité d'obtenir un nombre premier est $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

178 Il y a 32 issues possibles. Parmi elles il y a 5 issues qui donnent 6 et 4 issues qui donnent 8. Donc la probabilité est : $\frac{9}{32}$.

Objectif 3 Utiliser les opérations sur les événements

179 1. $p(V \cap T) = \frac{2}{5}$ et $p(V \cup T) = \frac{3}{5}$.

2. • $V \cap \overline{T}$: « La lettre est une voyelle d'au moins 3 points.» $p(V \cap \overline{T}) = 0$.

• $\overline{V} \cup T$: « La lettre est une consonne ou elle a moins de 3 points.» $p(\overline{V} \cup T) = 1$.

180 À l'aide d'un diagramme de Venn on trouve qu'il y a 14 élèves qui ont apporté deux calculatrices.

Donc la probabilité est : $\frac{14}{32} = \frac{7}{16}$.

Objectif 4 Simuler une expérience et estimer une probabilité ou une proportion

181

```
import random
effectif=0
    for i in range(1,240):
        if random.random()<0.31:
            effectif=effectif+1
    print( effectif/239)
```

182 1. $p \approx 0{,}35$

2. Il y a 13 échantillons qui ne sont pas dans l'intervalle [0,3 ; 0,4], les 387 autres appartiennent à cet intervalle. Cela représente 96,75% donc c'est vérifié.

Travaux pratiques

p. 376-379

1 Problème du grand-duc de Toscane

• **Durée estimée :** 40 min

• **Objectif :** Utiliser la simulation pour estimer une probabilité, puis la déterminer en dénombrant.

▶ A. Simulation et vérification

1. b) La formule est **=A1+B1+C1**

2. Les résultats semblent confirmer l'impression du grand-duc.

▶ B. Estimation de la probabilité

2. On estime la probabilité d'obtenir 10 autour de 0,125.

3. a) Remplacer s=10 par s=9.

b) On estime la probabilité d'obtenir 9 autour de 0,115.

▶ C. Calcul de probabilité

1. a) On obtiendra 9 : 5 fois.

On obtiendra 10 : 4 fois

b) On obtiendra 9 : 6 fois.

On obtiendra 10 : 5 fois.

c) • 3 pour le 3^e dé donne pour 9 : 5 fois et pour 10 : 6 fois

• 4 pour le 3^e dé donne pour9 : 4 fois et pour 10 : 5 fois

• 5 pour le 3^e dé donne pour9 : 3 fois et pour10 : 4 fois

• 6 pour le 3^e dé donne pour 9 : 2 fois et pour 10 : 3 fois

2. a) Au total, on obtiendra 9 : 25 fois et 10 : 27 fois

b) La probabilité d'obtenir 9 est égale à $\frac{25}{216}$.

La probabilité d'obtenir 10 est égale à $\frac{27}{216}$.

2 Marche aléatoire dans un repère orthonormé

• **Durée estimée :** 30 min

• **Objectif :** Étudier une marche aléatoire

▶B. Calcul de la fréquence observée

1. a) Cela signifie « Obtenir *Pile* ».
b) La valeur 0.
2. a) Cela signifie « On est arrivé au point A ».
b) Ce programme calcule la fréquence « d'arrivée au point A » sur un échantillon de 1000 simulations de marche aléatoire en 10 étapes.
3. c) On peut estimer cette probabilité autour de 0,25.
4. On peut estimer cette probabilité autour de 0,1.

3 Anniversaires

• **Durée estimée :** 25 min
• **Objectif :** Utiliser une simulation sur tableur pour estimer une probabilité.

▶A. Simulation d'une classe avec un tableur

2. c) **=SI(SOMME(B2:B33)>0;1;0)**
d)«S'il y a la valeur 1 dans la cellule B34 cela signifie que, dans la classe, plusieurs élèves ont des dates d'anniversaires identiques, et sinon cela signifie qu'aucun élève n'a la même date anniversaire qu'un autre».

▶B. Simulation d'un échantillon de 4000 classes

2. b) Il correspond au nombre de classes dans lesquelles des élèves ont les mêmes dates d'anniversaires.
3. **=ADT34/400**
4. On remarque que la probabilité que dans une classe de 32 élèves, au moins 2 élèves aient la même date d'anniversaire est environ 0,75.
5. On obtient environ 0,17.

4 Fluctuation d'échantillonnage et parité

• **Durée estimée :** 40 min
• **Objectif :** Comprendre la notion d'intervalle de fluctuation et son interprétation.

▶A. Échantillon aléatoire de taille *n*

1. $p=0,5$.
2.

```
def freq_echantillon(n):
    femmes=0
    for i in range(1,n+1):
        if random.random()<0.5:
            femmes=femmes+1
    return femmes/n
```

▶B. Fluctuations d'échantillons de taille 25

2. «Ce programme simule 100 échantillons de 25 personnes selon que ce sont des femmes ou non, puis affiche les points de coordonnées (`i,f`) où `i` est le n° de l'échantillon et *f* est la fréquence de femmes dans cet échantillon. »
4. L'intervalle semble être [0,3 ; 0,7].

5. a) $\left[0{,}5-\frac{1}{\sqrt{25}};0{,}5+\frac{1}{\sqrt{25}}\right] \Leftrightarrow [0{,}3\,;0{,}7]$ **b)** Les intervalles correspondent.

6. a) $f=\frac{17}{25}=0{,}68 \in [0{,}3\,;0{,}7]$

b) Il semble donc que l'entreprise A ait choisi ses employés de façon aléatoire sans tenir compte de leur sexe.

▶C. Fluctuations d'échantillons de taille 400

1. Remplacer `25` par `400`.

2. a) $I=[0{,}45\,;0{,}55]$

3. a) $f=\frac{176}{400}=0{,}44 \notin I$

b) Il semble que l'entreprise B n'ait pas choisi ses employés de façon totalement aléatoire et a tenu compte de leur sexe.

Direction éditoriale : Caroline Edenhoffer
Édition et mise en pages : Marilyn Maisongrosse
Schémas techniques : Nord compo et Marilyn Maisongrosse
Coordination numérique : Dominique Garrigues et Marguerite-Marie Leléony